Az analízis megalapozása példatár

Gémes Margit, Keleti Tamás, Kovács Ágnes, Pfeil Tamás, Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2019. február 25.

A kötet az Eötvös Loránd Tudományegyetem tankönyv- és jegyzettámogatási pályázatán elnyert forrás felhasználásával jelent meg.

Szakmai lektor: dr. Besenyei Ádám egyetemi docens

A kézirat lezárva: 2019. február 25.

Tartalomjegyzék

1. A logika alapjai 4

2. Halmazok, valós számok 15

3. Bizonyítási módszerek, becslések 26

4. Sorozatok határértéke 36

5. Függvények lokális és globális tulajdonságai 55

6. Végtelen sorok 62

7. Taylor-sorok 67

Megoldások 68

1. A logika alapjai

Egy szigeten olyan lakosok élnek, akik csak hétfőn, szerdán és pénteken mondanak igazat, a hét többi napján hazudnak. Mikor hangozhattak el a következő mondatok?

1.1. Holnap igazat fogok mondani.

1.2. Holnap és holnapután is hazudni fogok.

A híres Feit–Thompson-tétel azt mondja ki, hogy minden páratlan elemszámú véges csoport feloldható. A tétel alapján mit válaszolhatunk az alábbi kérdésekre? (Az is lehet, hogy semmit, vagyis a tételből semmit sem következik az adott kérdésre.) A feladatban szándékosan szerepelnek olyan matematikai fogalmak is, amelyeket nem ismernek. Ez nem okozhat gondot, mert most csak a logikai összefüggéseket kell érteni.

1.3. Van-e 111 elemű nem feloldható csoport?

1.4. Van-e 112 elemű feloldható csoport?

1.5. Van-e 111 elemű feloldható csoport?

1.6. Van-e 112 elemű nem feloldható csoport?

1.7. Igaz-e, hogy ha egy véges csoport nem feloldható, akkor páros elemszámú?

1.8. Igaz-e, hogy ha egy véges csoport feloldható, akkor páratlan elemszámú?

1.9. Igaz-e, hogy minden páratlan elemszámú nem feloldható véges csoport torziómentes?

1.10. Igaz-e, hogy minden páratlan elemszámú véges csoport torziómentes vagy feloldható?

A matematika talán legfontosabb és leghíresebb sejtése a Riemann-sejtés, mely azt mondja ki, hogy a Rimann-féle zéta-függvény minden nem triviális komplex gyökének a valós része $1/2$. (A triviális gyökök a $-2, -4, -6, \ldots$.) A feladatban szándékosan szerepelnek olyan matematikai fogalmak is, amelyeket nem ismernek. Ez nem okozhat gondot, mert most csak a logikai összefüggéseket kell érteni.

1.11. Bizonyítja-e a sejtést, ha találunk egy olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része $0{,}5$?

1.12. Bizonyítja-e a sejtést, ha találunk egymillió olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része $0{,}5$?

1.13. Megcáfolja-e a sejtést, ha találunk egy olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része $0{,}498$?

Ismert (és a tananyag része), hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye. Ez és az eddig tanultak alapján válaszoljunk a kérdésekre.

1.14. Van-e olyan függvény, amelynek nincs primitív függvénye, de differenciálható?

1.15. Van-e olyan függvény, amelynek van primitív függvénye, de nem differenciálható?

Matematika országban a bíró csak a bizonyítékoknak hisz. Például, ha Frigyes azt állítja, hogy van fekete oroszlán, akkor állításának helyességéről meggyőzheti a bírót azzal, ha mutat neki egy fekete oroszlánt.

1.16. Frigyes azt állítja, hogy minden oroszlán fekete. Elég bizonyíték-e, ha mutat a bírónak egy fekete oroszlánt?

1.17. Frigyes azt állítja, hogy minden oroszlán fekete, Gerzson pedig azt állítja, hogy Frigyes téved. Hogyan bizonyíthatná Gerzson az állítását?

1.18. Frigyes azt állítja, hogy minden 2-re végződő négyzetszám osztható 3-mal. Gerzson szerint Frigyes téved. Hogyan bizonyíthatná Gerzson az állítását? Frigyesnek vagy Gerzsonnak van igaza?

1.19. Frigyes azt állítja, hogy bármely egymást követő három egész szám összege osztható 3-mal. Hogyan bizonyíthatná Frigyes az állítását?

1.20. Frigyes azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehetnek negatív gyökei. Hogyan bizonyíthatná Frigyes az állítását?

1.21. Frigyes azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehet 3 gyöke. Gerzson szerint Frigyes téved. Hogyan bizonyíthatná Gerzson az állítását?

Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat írt. Melyik kezével írta a következő állításokat?

1.22. Minden 9-cel osztható négyzetszám osztható 3-mal.

1.23. Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel és 4-gyel.

1.24. Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel vagy 4-gyel.

1.25. Minden 2-re végződő négyzetszám páratlan.

1.26. A 0 páros szám.

1.27. Van olyan piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked.

1.28. Minden piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked, 17-nél nagyobb prímszám.

Tudjuk, hogy b és c olyan számok, melyekre $b \mid 2520 \implies c \mid 2520$. Mire következtethetünk az alábi állításokból?

1.29. $b \mid 2520$

1.30. $c \mid 2520$

1.31. $b \nmid 2520$

1.32. $c \nmid 2520$

1.33. Ha kedd van, akkor Belgiumban vagyunk. Melyik állítás következik ebből?

(a) Ha szerda van, akkor nem Belgiumban vagyunk.

(b) Ha Belgiumban vagyunk, akkor kedd van.

(c) Ha nem Belgiumban vagyunk, akkor nincs kedd.

Hány olyan részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmaznak, amelyre teljesül az alábbi tulajdonság?

1.34. Az 1 benne van a részhalmazban.

1.35. Az 1 és a 2 benne van a részhalmazban.

1.36. Az 1 vagy a 2 benne van a részhalmazban.

1.37. Az 1 nincs benne, vagy a 2 nincs benne a részhalmazban?

1.38. Az 1 benne van a részhalmazban, vagy a 2 nincs benne a részhalmazban.

1.39. Ha az 1 benne van a részhalmazban, akkor a 2 benne van a részhalmazban.

1.40. Ha az 1 benne van a részhalmazban, akkor a 2 nincs benne a részhalmazban?

1.41. Egy egész számokból álló H halmazról tudjuk, hogy valahányszor x és $x+1$ benne van a H halmazban valamilyen x-re, akkor $x+2$ is benne van H-ban. Következik-e ebből, hogy valahányszor y nincs benne H-ban, de $y-1$ benne van H-ban valamilyen y-ra, akkor $y-2$ nincs benne H-ban?

1.42. Fogadjuk el igaznak az alábbiakat:

(a) Ha egy állat emlős, akkor vagy van farka, vagy van kopoltyúja.

(b) Egyik állatnak sincs farka.

(c) Minden állat vagy emlős, vagy van farka, vagy van kopoltyúja.

Következik-e a fentiekből, hogy minden állatnak van kopoltyúja?

1.43. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: Ha egy macska bolhás, akkor vakarózik.

Q: Minden bolhás macska vakarózik.

1.44. Fogadjuk el igaznak, hogy ki korán kel, aranyat lel. Melyik állítás igazsága következik ebből?

(a) Aki későn kel, nem lel aranyat.

(b) Aki aranyat lelt, az korán kelt.

(c) Aki nem lelt aranyat, az későn kelt.

1.45. Igaz-e, hogy ha a teremben repkedő krokodil prímszám, akkor minden prímszám páratlan? Igaz-e az állítás megfordítása? Igaz-e, hogy ha minden prímszám páratlan, akkor a teremben repkednek krokodilok?

1.46. Bizonyítsuk be, hogy

$$(A \Longleftrightarrow B) \;=\; (A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longleftarrow B)\,!$$

Igazak-e a következő állítások?

1.47. $(A \Longrightarrow B) \;=\; (B \Longrightarrow A)$

1.48. $(A \Longrightarrow B) \;=\; (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$

1.49. $(A \Longrightarrow B) \;=\; (\overline{A} \Longrightarrow \overline{B})$

1.50. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \subset C$

1.51. $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \in C$

1.52. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$

1.53. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$

1.54. $(A \in B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$

Formalizáljuk, azaz írjuk fel csak logikai jelekkel az alábbi állításokat!

1.55. Nem igaz, hogy P vagy Q.

1.56. Nem P, ha nem Q.

1.57. Sem Q, sem P.

1.58. P, pedig nem is Q.

1.59. Csak akkor P, ha Q.

1.60. Sem P, sem Q.

1.61. Q, feltéve, hogy P.

1.62. Nem P, mégis Q.

1.63. P vagy Q, de nem mindkettő.

1.64. Nem igaz, hogy ha P, akkor egyúttal Q is.

Írjuk fel az alábbi állítások igazságtáblázatát, az állítások tagadását és a tagadások igazságtáblázatát!

1.65. $\neg A \Longrightarrow B$

1.66. $\neg B \Longrightarrow \neg A$

Tegyük fel, hogy az A állításból nem következik a B állítás. Van-e a következő formulák között olyan, amelyik pontosan ugyanezt jelenti, azaz ekvivalens azzal, hogy $\neg(A \Longrightarrow B)$?

1.67. $A \implies \neg B$

1.68. $\neg A \implies B$

1.69. $B \implies A$

1.70. $\neg B \implies A$

Olvassuk fel a következő állításokat!

1.71. $(\exists x)\ (x \in H)$

1.72. $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$

1.73. $(\forall x \in H)(\forall y \in H)(\forall z \in \mathbb{R})\ (x < z < y \implies z \in H)$

1.74. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) a prímszámok halmazát!

Írjuk fel az alábbi állítások tagadását!

1.75. Kék az ég, és zöld a fű.

1.76. Ki korán kel, aranyat lel.

1.77. Minden tengerész járt már kocsmában.

1.78. Van olyan kocsma, ahol még nem járt tengerész.

1.79. Minden tengerész ismer olyan kikötőt, ahol van olyan kocsma, amiben még nem járt.

1.80. Ha a nagynénikémnek kerekei lennének, akkor ő lenne a miskolci gyors.

1.81. Minden egér szereti a sajtot.

1.82. Aki másnak vermet ás, maga esik bele.

1.83. Minden ember életében jön egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.

1.84. Van, akit nem várnak, csak érkezik.

1.85. Mindenki másképp csinálja.

1.86. Londonban, hej, van számos utca, és minden utcán van sarok.

1.87. Egy csoport kapott egyszer egy zacskó cukorkát. Igaz-e, hogy ha volt olyan hallgató, aki minden cukorkát szopogatott, akkor volt olyan cukorka, amelyiket minden hallgató szopogatott? Igaz-e az állítás megfordítása?

Egy táncmulatságon lányok és fiúk táncoltak. Jelölje $T(L, F)$ azt az állítást, hogy az L lány az este folyamán táncolt az F fiúval. Fordítsuk le emberi nyelvre az összes alábbi állítást! Minden állításpárnál döntsük el, hogy van-e különbség a két állítás között, következik-e valamelyikből a másik, ekvivalensek-e!

1.88. **P:** $(\exists L)(\exists F)\ T(L, F)$ **Q:** $(\exists F)(\exists L)\ T(L, F)$

1.89. **P:** $(\forall L)(\exists F)\ T(L, F)$ **Q:** $(\exists F)(\forall L)\ T(L, F)$

1.90. **P:** $(\forall L)(\forall F)\ T(L, F)$ **Q:** $(\forall F)(\forall L)\ T(L, F)$

Jelentse $P(x)$, hogy x páros, $H(x)$, hogy x hattal osztható. Mit jelentenek a következő formulák, és igazak-e?

1.91. $P(4) \wedge H(12)$

1.92. $\forall x \quad P(x) \Longrightarrow H(x)$

1.93. $\exists x \quad P(x) \wedge \neg H(x)$

1.94. $\forall x \quad H(x) \Longrightarrow P(x)$

Legyen f valós függvény, $D(f) = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ és $L \in \mathbb{R}$. Mit jelentenek az alábbi állítások? Tagadjuk az állításokat!

1.95. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

1.96. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

1.97. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

1.98. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

1.99. $(\forall B > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > B)$

1.100. $(\forall B < 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow f(x) < B)$

1.101. Oldjuk meg a következő két feladatot!

(a) Adjuk meg az $y^2 > 25$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

(b) Keressük meg azokat az Y értékeket, amelyekre igaz az, hogy ha $y > Y$, akkor $y^2 > 25$.

Azonos-e a két feladat megoldáshalmaza? Megoldása-e az (a), illetve a (b) feladatnak az $y = -7$? Ekvivalens-e az (a) és a (b) feladat?

1.102. Oldjuk meg a következő két feladatot!

(a) Adjuk meg az $\dfrac{1}{y^2} < \dfrac{1}{100}$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

(b) Keressük meg azokat az Y értékeket, amelyekre igaz, hogy ha $y < Y$, akkor $\dfrac{1}{y^2} < \dfrac{1}{100}$.

Azonos-e a két feladat megoldáshalmaza? Megoldása-e az (a), illetve a (b) feladatnak az $y = 17$? Ekvivalens-e az (a) és a (b) feladat?

1.103. Hány igaz állítás van a következő keretben?

1) A teremben repkedő piros krokodilok prímszámok.
2) Ha $x^2 = y^2$, akkor $x = y$
3) Ha $x = y$, akkor $\sin x = \sin y$.

1.104. Hány igaz állítás van a következő keretben?

1) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3) Ebben a keretben pontosan 1 igaz állítás van.

A következő feladatok mindegyikében két állítás szerepel egy olyan állatkertről, amelyikben van 10 oroszlán és 7 gorilla, és 9 gondozó törődik velük. Vizsgáljuk meg, lehet-e mindkét állítás igaz! Vizsgáljuk meg, lehet-e mindkét állítás hamis! Vizsgáljuk meg, lehet-e az egyik állítás igaz, a másik hamis, és ha lehet, mondjuk meg, melyik az igaz állítás!

1.105. **P:** Minden gorillának van kedvenc gondozója.

Q: Van olyan gondozó, akit minden gorilla kedvel.

1.106. **P:** Minden oroszlán minden gondozót kedvel.

Q: Van olyan oroszlán, amelyik kedvel gondozót.

1.107. **P:** Van olyan gondozó, aki kedvel oroszlánt.

Q: Van olyan oroszlán, amelyik kedvel gondozót.

1.108. **P:** Van olyan gorilla, aki minden gyümölcsöt a kedvenc gondozójától kap.

Q: Minden gyümölcs esetén van a olyan gorilla, amelyik azt a gyümölcsöt a kedvenc gondozójától kapja.

1.109. Négy embernek egy rozoga hídon kell átmennie sötétben egy zseblámpa segítségével. Egyszerre csak ketten tudnak átmenni és lámpa nélkül nem, tehát csak a „ketten átmennek, egy visszajön a lámpával” módszer lehetséges. Az emberek maximális sebessége különböző. Ha egyedül vannak, rendre 1, 2, 5 és 10 perc alatt érnek át. Két ember együtt a lassabbik sebességével tud haladni. Átjuthatnak-e a hídon valamennyien 30 perc alatt? Átjuthatnak-e 20 perc alatt? És 17 perc alatt? Vagy 15 perc alatt?

1.110. Kovács úr minden délután 5 órakor érkezik vonattal az állomásra, ahol a felesége várja kocsival, és azonnal hazaviszi. Egyik nap Kovács úr hamarabb végzett a munkájával, és korábbi vonatra szállt. Így 4 órakor érkezett az állomásra. Elindult gyalog hazafelé. A felesége a szokásos időben indult érte kocsival. Amikor az úton találkoztak, Kovács úr beült a kocsiba, és hazamentek. A szokásos időpontnál 10 perccel hamarabb érkeztek haza. Hány órakor ült be Kovács úr az autóba, ha feltételezzük, hogy a felesége mindig azonos és állandó sebességgel ment a kocsival?

1.111. Bendegúz egyszerre udvarolt Amáliának és Borókának. Amália a metró A, Boróka ugyanazon metróvonal B végállomásánál lakott. Bendegúz munka után lement a metróba, és mert mindkét lányt egyformán szerette, a metróra bízta a döntést. Amelyik metró először jött, arra szállt fel. A metrók mindkét irányban 10 percenként követték egymást. Egy idő után azt vette észre, hogy átlagosan 10 alkalomból 9-szer Amáliához ment, és csak egyszer Borókához. Hogyan lehetséges ez?

1.112. Egy börtönben az egyik rabnak felajánlják, hogy kiszabadulhat, ha a börtön kapuját egy megadott jel után pontosan 45 perccel nyitja ki. Órát viszont nem adnak neki, csak egy doboz gyufát és két gyújtózsinórt. A gyújtózsinórokról azt lehet tudni, hogy mindkét gyújtózsinór pontosan 1 óra alatt ég végig, de a láng időben nem feltétlenül egyszerre és nem feltétlenül egyenletesen halad végig a zsinórokon. Hogyan tudja a rab a gyújtózsinórok segítségével pontosan kimérni a 45 percet?

1.113. Egy biológus egy 10 m hosszú rúdra 100 hangyát rakott fel. Véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd melyik pontjára került, és az is véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd

melyik vége fele nézett. A hangyák állandó, 1 cm/s sebességgel haladtak mindaddig, amíg bele nem ütköztek egy másik hangyába. Akkor mindkét hangya megfordult, és 1 cm/s sebességgel haladtak az ellenkező irányba a következő ütközésig, amikor is az ütköző hangyák megint megfordultak, és állandó, 1 cm/s sebességgel haladtak tovább az ellenkező irányba a következő ütközésig, és így tovább. Ha egy hangya elért a rúd valamelyik széléhez, akkor leesett a rúdról. Bizonyítsuk be, hogy a kísérlet kezdete után 20 perccel már üres volt a rúd!

Egy vándor a sivatag szélén egy őrbódéhoz érkezett. Az őrbódétól két út indult tovább. Az egyik út a sivatag közepébe vezetett, ahonnan még senki nem jött vissza. A másik út egy oázishoz vitt. Az őrbódéban különböző őrök lehetnek. Lehet igazmondó, aki mindig igazat mond, lehet hazudós, aki mindig hazudik, és lehet szeszélyes, aki hol igazat mond, hol hazudik. A vándor eldöntendő kérdéseket tehet fel az őröknek, az őrök csak „igen”-nel vagy „nem”-mel felelhetnek. Milyen kérdéssel, illetve kérdésekkel tud a vándor biztosan eljutni az oázisba?

1.114. A bódéban két őr van, az egyik igazmondó, a másik hazug, és a vándor egy kérdést tehet fel.

1.115. A bódéban egy őr van, aki vagy igazmondó vagy hazug (nem tudjuk, melyik), és a vándor egy kérdést tehet fel.

1.116. A bódéban három őr van, egy igazmondó, egy hazug és egy szeszélyes, és a vándor két kérdést tehet fel.

1.117. A bódéban négy őr van, két igazmondó és két szeszélyes, és a vándor akárhány kérdést feltehet.

1.118. Oldjuk meg az előző feladatokat úgy, hogy az őrök ugyan értik a kérdést, de a vándor által nem ismert saját nyelvükön felelnek: csak „ukk” vagy „mukk” lehet a válaszuk, ahol a két válasz közül az egyik igent, a másik pedig nemet jelent.

1.119. 3 matematikus bemegy egy kocsmába, és rendel. A nagy zajban nem hallják egymást, a pincér is alig hallja őket. Ezért jó hangosan megkérdezi:
– Mindenki rendelt sört?
A matematikusok is hangosan felelnek:
1. matematikus: – Nem tudom.
2. matematikus: – Nem tudom.
3. matematikus: – Igen.
Kinek hoz, és kinek nem hoz sört a pincér?

Egy másik esetben a pincér ezeket a válaszokat kapta:
1. matematikus: – Nem tudom.
2. matematikus: – Nem tudom.

3. matematikus: – Nem.
Mit kérdezett a pincér, ha ezek után mindenkinek hozott sört?

2. Halmazok, valós számok

Igazak-e tetszőleges A és B halmazokra a következő állítások? Amelyik nem igaz, ott döntsük el, hogy igaz-e valamelyik tartalmazás, azaz hogy igaz állítást kapunk-e (minden A, B halmazpárra), ha $=$ helyett $\subset$-t vagy $\supset$-t írunk!

2.1. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$?

2.2. $(A \cup B) \setminus A = B$?

2.3. $(A \setminus B) \cup B = A$

2.4. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

2.5. $(A \setminus B) \cup A = A \cup B$

Igazak-e a következő állítások?

2.6. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \implies A \in C$

2.7. $(A \subset B) \wedge (B \in C) \implies A \subset C$

2.8. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies A \subset C$

2.9. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies A \in C$

2.10. $(A \in B) \wedge (B \in C) \implies A \in C$

2.11. $(A \in B) \wedge (B \subset C) \implies A \in C$

2.12. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bizonyítsuk be az alábbiakat tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ halmazokra!

2.13. $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

2.14. $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

2.15. Állapítsuk meg az állítások logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy melyikből következik a másik!

P: $(x \in A) \vee (x \in B)$

Q: $x \in A \cap B$

2.16. Állapítsuk meg az állítások logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy melyikből következik a másik!

P: $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$

Q: $A \setminus D \subset B \setminus C$

2.17. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) azt, hogy a H halmaz pontosan 1 elemű!

2.18. Van-e olyan A halmaz, amelyre $\mathbb{Z} \subset A$ és $\mathbb{Z} \in A$ is teljesül?

Legyenek A, B, C halmazok. Írjuk fel e három halmaz, valamint az unió, a metszet és a különbség halmazműveletek segítségével az alábbi halmazokat!

2.19. Azon elemek halmaza, amelyek az A halmazban benne vannak, de a B és a C halmazban nincsenek benne.

2.20. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C mindegyikében benne vannak.

2.21. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan kettőben vannak benne.

2.22. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan egyben vannak benne.

2.23. Legyen $A = \{1, 3, 5\}$ és $B = \{1, 2, 4\}$. Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ halmazokat! Adjuk meg az A halmaz $P(A)$ hatványhalmazát is!

2.24. Legyen A, B és C nem üres halmaz. Van-e tartalmazási kapcsolat $(A \cup B) \times C$, illetve $(A \times C) \cup (B \times C)$ között?

2.25. Határozzuk meg az $A = \{1, 3\}$ és $B = \{0\}$ halmazok $A \times B$ és $B \times A$ Descartes-szorzatát!

2.26. Határozzuk meg az $A = \{1, \{1\}\}$ halmaz hatványhalmazát!

Elemei-e az alábbi halmazok az $A = \{1, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmaznak? Részhalmazai-e az alábbi halmazok az A halmaznak?

2.27. $\{\emptyset\}$

2.28. $\{1, 2\}$

2.29. $\{\{1, 2\}\}$

2.30. $\{1, \{1, 2, 3\}\}$

Ábrázoljuk a következő halmazokat a számegyenesen!

2.31. $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 \leq 5\}$

2.32. $\{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$

2.33. $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (\forall y \in \mathbb{R})\ (y > x \Longrightarrow y^2 > 4)\}$

2.34. $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (\forall y \in \mathbb{R})\ (y < x \Longrightarrow y^2 < 4)\}$

Bizonyítsuk be (az axiómákból) a következő állításokat!

2.35. Minden valós számhoz van nála nagyobb egész szám.

2.36. Minden valós számhoz van nála kisebb egész szám.

2.37. Bizonyítsuk be, hogy bármely két különböző szám között van irracionális szám!

2.38. Írjuk fel az arkhimédészi és a Cantor-axióma tagadását!

Teljesül-e a Cantor-axióma, ha zárt intervallumok helyett a következő intervallumok szerepelnének benne?

2.39. Nyílt.

2.40. Balról zárt, jobbról nyílt.

2.41. Teljesül-e a Cantor-axióma, ha zárt intervallumok helyett jobbról zárt, balról nyílt intervallum szerepelne benne?

Igazoljuk, hogy minden a és b valós számra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

2.42. $|a+b| \leq |a| + |b|$

2.43. $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

2.44. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$.

2.45. Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok teste nem rendezhető, azaz nem lehet megadni a komplex számok halmazán olyan rendezést, amelyre teljesül minden rendezési axióma!

Korlátosak-e alulról, illetve felülről a következő halmazok? Ha igen, adjunk meg alsó, illetve felső korlátokat! Határozzuk meg a halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

2.46. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.47. $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.48. $(0,1) \cap \mathbb{Q}$

2.49. $(0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

2.50. $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.51. $\{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$

2.52. $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$

2.53. a negatív racionális számok halmaza

Lehet-e a H halmaz szuprémuma c, ha teljesülnek a következő állítások?

2.54. $k < c$, és k felső korlátja H-nak

2.55. $k > c$, és k alsó korlátja H-nak

2.56. $\exists h \in H \quad h > c$

2.57. c maximuma H-nak

Legyen H egy nem üres számhalmaz. Mit jelentenek a következő állítások?

2.58. $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad y < x$

2.59. $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad y < x$

Igazak-e az előző két feladat állításai a következő halmazokra?

2.60. $H_1 = \{c : 0 \le c < 1\}$

2.61. $H_2 = \{c : 0 < c \le 1\}$

2.62. $H_3 = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

2.63. $H_4 = \{[c] : 0 < c < 3\}$

2.64. $H_5 = \{\{c\} : 0 < c < 3\}$

2.65. $H_6 = \{\sin c : c \in \mathbb{R}\}$

2.66. $H_7 = \{\ln c : c > 0\}$

2.67. $H_8 = \{c^2 : c \in \mathbb{R}\}$

Legyen $K_1 = K_2 = \{c : 0 < c < 1\}$. Igazak-e a következő állítások?

2.68. $\forall x \in K_1 \quad \exists y \in K_2 \quad x < y$

2.69. $\exists y \in K_2 \quad \forall x \in K_1 \quad x < y$

Legyen H egy nem üres számhalmaz. Írjuk fel szöveggel a „nem” szó használata nélkül az alábbi állításokat! Írjuk fel logikai kvantorokkal is a következő állításokat!

2.70. H-nak nincs minimuma.

2.71. H felülről nem korlátos.

2.72. A H halmaz nem korlátos.

2.73. Van-e olyan korlátos

(a) halmaz

(b) számsorozat

amelynek nincs se maximuma, se minimuma? (Egy számsorozat korlátos, ha a sorozat tagjaiból álló halmaz korlátos.)

2.74. Tegyük fel, hogy A nem üres, felülről korlátos halmaz, és $\sup A = b$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x \in A$, amelyre $x > b - \varepsilon$!

Van-e olyan $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre teljesülnek a következő állítások?

2.75. $\sup A > \inf A$

2.76. $\sup A < \inf A$

2.77. $\sup A = \inf A$

2.78. $\sup A \neq \inf A$

Legyen H valós számok egy halmaza. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?

2.79. $(\exists x)\ (x \in H)$

2.80. $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$

2.81. $(\forall x)\ (x \in H \Longrightarrow x \in \mathbb{Z})$

2.82. $(\forall x)\ (x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \in H)$

2.83. Bizonyítsuk be, hogy bármely két különböző valós szám között van véges tizedes tört!

2.84. Mi a kapcsolat a véges tizedes tört alakban felírható számok halmaza és a racionális számok halmaza között?

2.85. Igaz-e, hogy minden irracionális szám végtelen tizedes tört alakja egyértelmű?

Igazak-e a következő állítások?

2.86. Minden véges tizedes tört alakban felírható szám racionális.

2.87. Minden racionális szám felírható véges tizedes tört alakban.

2.88. Minden irracionális szám végtelen tizedes tört alakja egyértelmű.

2.89. Minden racionális szám végtelen tizedes tört alakja nem egyértelmű.

2.90. Bizonyítsuk be a hatványozás azonosságait pozitív alap(ok) és egész kitevő(k) esetén!

2.91. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$. Mit mondhatunk $\sup A$ és $\sup B$ nagyságviszonyáról (vagyis milyen egyenlőtlenség igaz biztosan) és mit $\inf A$ és $\inf B$ nagyságviszonyáról?

2.92. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből melyik következik?

(a) H alulról nem korlátos.

(b) H-nak nincs legkisebb eleme.

(c) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ y < x$.

Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}$ olyan nem üres részhalmazok, melyekre $A \subset B$. Milyen egyenlőtlenség áll fenn minden A és B esetén a következő két érték között?

2.93. $\sup A$ és $\sup B$

2.94. $\inf A$ és $\inf B$

2.95. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra

$$\Big((\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ x \leq y\Big) \implies \sup A \leq \sup B.$$

2.96. Legyen H egy nem üres számhalmaz. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

P: H felülről korlátos

Q: $\forall h \in H \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad h < K$

Legyen H egy nem üres számhalmaz. Mit jelentenek a következő állítások?

2.97. $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x \leq y$

2.98. $\exists y \in H \quad \forall x \in H \quad x \leq y$

Igazak-e az előző két feladat állításai a következő halmazokra?

2.99. $H_1 = \{c : 0 \leq c < 1\}$

2.100. $H_2 = \{c : 0 < c \leq 1\}$

2.101. $H_3 = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

2.102. $H_4 = \{[c] : 0 < c < 3\}$

2.103. $H_5 = \{\{c\} : 0 < c < 3\}$

2.104. $H_6 = \{\sin c : c \in \mathbb{R}\}$

2.105. $H_7 = \{\ln c : c > 0\}$

2.106. $H_8 = \{c^2 : c \in \mathbb{R}\}$

2.107. Tegyük fel, hogy A és B olyan nem üres számhalmazok, melyekre teljesül, hogy

$$(\forall x \in A)\ (\forall y \in B)\ x < y.$$

Következnek-e ebből a következő állítások?

(a) $\sup A \leq \sup B$ **(b)** $\sup A < \sup B$

2.108. Igaz-e, hogy az A és B nem üres, korlátos halmazokra $\inf A = \inf B$ és $\sup A = \sup B$ is teljesül, akkor $A \cap B \neq \emptyset$?

2.109. Mely valós számok írhatóak fel egyértelműen végtelen n-edestört alakban minden n-re az n-es számrendszerben?

Legyenek A, B, C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \setminus B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

2.110. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan egyben vannak benne.

2.111. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan háromban vannak benne.

Legyenek A, B, és C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \setminus B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

2.112. Azon elemek halmaza, amelyek A-ban benne vannak, de B-ben és C-ben nincsenek benne.

2.113. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan kettőben vannak benne.

2.114. Szemléltessük a következő számhalmazokat számegyenesen! Döntsük el, hogy melyik intervallum, és melyik nem az! Az intervallumok esetében döntsük el, hogy melyik zárt, melyik nyílt, és melyik se nem zárt, se nem nyílt!

(a) $A = \{1, 2, 3\}$ **(b)** $B = \{5, 6\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 6\}$ **(d)** $D = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 6\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\}$ **(f)** $F = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x < 6\}$

2.115. Legyen $H_1 = \{h \in \mathbb{R} : -3 < h \leq 1\}$ és $H_2 = \{h \in \mathbb{R} : -3 \leq h < 1\}$.
Melyik állítás igaz, ha $H = H_1$ vagy $H = H_2$?

(a) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (y < x)$ **(b)** $\forall y \in H\ \exists x \in H\ (y < x)$

(c) $\exists x \in H\ \forall y \in H\ (y \leq x)$ **(d)** $\exists y \in H\ \forall x \in H\ (y \leq x)$

2.116. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mit jelentenek a következő állítások?

(a) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (y < x)$ **(b)** $\forall y \in H\ \exists x \in H\ (y < x)$

(c) $\exists x \in H\ \forall y \in H\ (y \leq x)$ **(d)** $\exists y \in H\ \forall x \in H\ (y \leq x)$

2.117. Határozzuk meg a következő intervallumsorozatok metszetét! (Például rajz segítségével sejtsük meg a metszetet!) Ha a sejtés szerint a metszet M, akkor bizonyítsuk be, hogy $\forall x \in M$ esetén teljesül, hogy $\forall n\ x \in I_n$, továbbá ha $y \notin M$ akkor $\exists k\ y \notin I_k$. (Itt k és n pozitív egész számok.)

(a) $I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ **(b)** $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

(c) $I_n = \left[2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right]$ **(d)** $I_n = \left(2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$

(e) $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ **(f)** $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

(g) $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$ **(h)** $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

Melyik állítás igaz? (A választ mindig indokoljuk!)

2.118. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok zártak.

2.119. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor az intervallumok nyíltak.

2.120. Bármely egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont.

2.121. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nyílt.

2.122. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nem zárt.

2.123. Ha egy zárt intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok egymásba vannak skatulyázva.

2.124. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont?

2.125. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete nem üres?

2.126. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete üres?

2.127. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi intervallum (nem csak egy pont)?

2.128. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi intervallum?

2.129. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

2.130. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb, illetve legnagyobb elemük?

2.131. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 73\}$

2.132. $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 73\}$

2.133. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{2}\}$

2.134. $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$

Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb illetve legnagyobb elemük?

2.135. prímszámok halmaza

2.136. pozitív számok halmaza

2.137. $[-5, -2)$

2.138. $(3, 2019]$

2.139. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

2.140. $\left\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.141. $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.142. $\left\{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.143. $\left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

2.144. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

(a) H alulról nem korlátos.

(b) H-nak nincs legkisebb eleme.

(c) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ y < x$.

(d) $(\forall y \in H)\ (\exists x \in H)\ y < x$.

2.145. Adjunk példát olyan nem üres valós számhalmazra, amelyik korlátos, de nincs legkisebb eleme!

2.146. Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz nem üres. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: H-nak nincs minimuma.

Q: $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\exists b \in H) \quad b < a$

2.147. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz melyikből következik a másik?

P: Az A halmaz véges (azaz véges sok eleme van).
Q: Az A halmaz korlátos.

2.148. Tudjuk, hogy H-nak nincs c-nél kisebb felső korlátja. Következik-e ebből, hogy $\sup H = c$?

2.149. Tudjuk, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$ vagy $ay + bx$?

2.150. Hol van a hiba a következő levezetésben?

Nyilvánvaló, hogy $\log_7 \frac{4}{5} = \log_7 \frac{4}{5}$.

Mivel $3 > 2$, ezért $3 \log_7 \frac{4}{5} > 2 \log_7 \frac{4}{5}$.

A logaritmus azonosságát felhasználva: $\log_7 \left(\frac{4}{5}\right)^3 > \log_7 \left(\frac{4}{5}\right)^2$.

Tehát: $\left(\frac{4}{5}\right)^3 > \left(\frac{4}{5}\right)^2$,

azaz $\frac{64}{125} > \frac{16}{25} = \frac{80}{125}$.

3. Bizonyítási módszerek, becslések

Igazak-e a következő állítások?

3.1. Két racionális szám összege mindig racionális.

3.2. Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális.

3.3. Két irracionális szám összege mindig irracionális.

3.4. Két irracionális szám összege mindig racionális.

Lehet-e racionális a következő műveletek eredménye?

3.5. Két irracionális szám összege.

3.6. Egy racionális és egy irracionális szám szorzata.

Igazak-e a következő állítások?

3.7. Két racionális szám szorzata mindig racionális.

3.8. Egy racionális és egy irracionális szám szorzata mindig irracionális.

3.9. Egy nullától különböző racionális szám és egy irracionális szám szorzata mindig irracionális.

3.10. Két irracionális szám szorzata mindig irracionális.

3.11. Két irracionális szám szorzata mindig racionális.

Lehet-e racionális a következő műveletek eredménye?

3.12. Két irracionális szám szorzata.

3.13. Egy racionális és egy irracionális szám összege.

3.14. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-egyenlőtlenségben az $a \geq -1$ feltétel nem hagyható el, mert ha elhagynánk, hamis állítást kapnánk!

Igazoljuk, hogy bármely a pozitív valós számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

3.15. $a + \frac{1}{a} \geq 2$

3.16. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} > 2$

Igazoljuk, hogy bármely a, b és c pozitív valós számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

3.17. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$

3.18. $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$

3.19. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

3.20. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

3.21. $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$

3.22. $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$

3.23. $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc$

3.24. $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

3.25. Néhány nemnegatív valós szám összege 1. Lehet-e a négyzetösszegük kisebb, mint $\frac{1}{100}$?

3.26. Néhány nemnegatív valós szám összege 1. Lehet-e a négyzetösszegük nagyobb, mint 100?

3.27. Néhány valós szám összege 1. Lehet-e a négyzetösszegük nagyobb, mint 100?

3.28. Határozzuk meg $\sqrt{0{,}999\ldots9}$ első 2019 tizedesjegyét, ahol a gyökjel alatt 2019 darab 9-es tizedesjegy áll!

Adjunk meg olyan N pozitív egész számot, amelyikre tetszőleges $n \geq N$ egész szám esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

3.29. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} > 1000$

3.30. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 1000$

3.31. $0{,}001n^5 + 300n^3 - 10 > 5000n^4 + 2016n^2 + 5$

3.32. $\frac{1}{100}n^6 + 200n^4 - 1000n^3 > 2999n^5 + 111n^2 - 51n$

3.33. $\sqrt[n]{2} < 1{,}001$

3.34. $1{,}01^n > 100$

3.35. $0{,}9^n < \frac{1}{1000}$

3.36. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0{,}0001$

3.37. $\sqrt[n]{1000} < 3 - \sqrt[n]{2019}$

Adjunk meg olyan n-t, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

3.38. $1{,}00001^n > 1000$

3.39. $0{,}9999^n < 0{,}0001$

3.40. $\sqrt[n]{2} < 1{,}00001$

3.41. $\sqrt[n]{1/2} > 0{,}9999$

Igazoljuk, hogy minden n pozitív egész számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség!

3.42. $\sqrt[n]{3} - 1 \leq \frac{2}{n}$

3.43. $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$

3.44. $\sqrt[n]{n} \leq 2 - \frac{1}{n}$

3.45. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

3.46. $\sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n}$.

3.47. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

3.48. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} \geq n$

3.49. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

3.50. Bizonyítsuk be, hogy minden elég nagy n-re teljesül az $\sqrt[n]{1000} < 3 - \sqrt[n]{n}$ egyenlőtlenség!

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b nemnegatív valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

3.51. $\sqrt[n+1]{a^2b^{n-1}} \leq \dfrac{2a + (n-1)b}{n+1}$

3.52. $\sqrt[n]{a^2b^{n-1}} \leq \dfrac{a^2 + (n-1)b}{n}$

3.53. $\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \dfrac{a + nb}{n+1}$

3.54. Az 1 m^3 térfogatú téglák közül melyiknek legkisebb a felszíne?

3.55. **Állítás:** Az 1 a legnagyobb szám.
Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy nem az 1 a legnagyobb szám, hanem A. Ekkor $A > 1 > 0$, továbbá $A > A^2$. Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív A-val osztva azt kapjuk, hogy $1 > A$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát mégis az 1 a legnagyobb szám.
Hol a hiba?

Igazoljuk az egyenlőségeket minden n pozitív egész számra!

3.56. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

3.57. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3.58. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3.59. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3.60. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3.61. $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3.62. $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

3.63. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$

Milyen állítást sugallnak az alábbi egyenlőségek? Igaz-e az állítás?

3.64.

$$\begin{aligned}1&=0+1\\2+3+4&=1+8\\5+6+7+8+9&=8+27\\10+11+12+13+14+15+16&=27+64\end{aligned}$$

3.65.

$$\begin{aligned}1&=1\\1+3&=4\\1+3+5&=9\\1+3+5+7&=16\end{aligned}$$

3.66.

$$\begin{aligned}1&=1\\1+8&=9\\1+8+27&=36\\1+8+27+64&=100\end{aligned}$$

3.67. Mennyi az első n páros pozitív egész szám négyzetének összege?

3.68. Mennyi az első n páratlan pozitív egész szám négyzetének összege?

3.69. Tegyük fel, hogy $a_1=4$ és minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén $a_{n+1}=3a_n-2$. Adjuk meg az a_n tagokat n függvényében!

3.70. Bizonyítsuk be, hogy minden $n\geq 5$ pozitív egész számra fennáll $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}<4^{n-1}$.

3.71. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan n_0 pozitív egész szám, amelyre minden $n>n_0$ pozitív egész szám esetén teljesül $3^n>5n^2$.

3.72. Igazoljuk, hogy ha $a_1=1$, $a_2=6$ és minden $n>2$ pozitív egészre $a_n=7a_{n-1}-12a_{n-2}$, akkor $a_n=3\cdot 4^{n-1}-2\cdot 3^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^+$!

3.73. Igazoljuk, hogy ha $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ és minden n pozitív egész számra $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, akkor $a_n = (n+1)2^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^+$!

3.74. Igazoljuk, hogy ha $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ és minden $n > 1$ pozitív egészre $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} + 4$, akkor $a_n = 3^{n-1} + 1,\ n \in \mathbb{N}^+$!

3.75. Tegyük fel, hogy $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Adjuk meg az a_n tagokat n függvényében!

3.76. Tegyük fel, hogy $a_1 = 29$, $a_2 = 85$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Adjuk meg az a_n tagokat n függvényében!

Legyen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ állítások egy sorozata. Ezek közül melyik állításokról tudjuk biztosan, hogy igazak, illetve melyekről, hogy biztosan hamisak a következő feltételek mellett?

3.77. A_1 igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

3.78. A_{100} igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

3.79. A_1 igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{n-1} is igaz.

3.80. A_{100} igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n+1} is hamis.

3.81. A_1 és A_2 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.

3.82. A_1 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.

3.83. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz. A_{2^n} hamis minden n-re.

3.84. A_7 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

3.85. A_{10} igaz és A_{11} igaz, és $n > 20$ esetén ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

3.86. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén A_{2^n} igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

3.87. A_1 hamis. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

3.88. A_1 igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.

3.89. A_{10} hamis. Ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

3.90. A_1 igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{2n} igaz.

3.91. A_1 igaz. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mind igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

3.92. A_3 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

3.93. A_1 igaz és A_2 igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

3.94. A_1 igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

3.95. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén A_{2^n} igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n-1} hamis.

3.96. $A_1 \vee (\forall n \in \mathbb{N}^+) \big(A_n \Longrightarrow (A_{n+3} \vee A_{n+7})\big)$ igaz.

3.97. $A_1 \wedge (\forall n \in \mathbb{N}^+) \big((A_n \vee A_{n+1}) \Longrightarrow A_{n+2}\big)$ igaz.

3.98. Igaz-e a következő tétel? Ha nem, akkor hol a hiba?

Tétel: Minden ló egyforma színű.

Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyforma színű.

Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n+1$-re belátni: adott $n+1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az $1., 2., \ldots, n.$ is egyforma színű és a $2., \ldots, n., (n+1).$ is egyforma színű, tehát mind az $n+1$ ló egyforma színű.

3.99. Egy futó 20 kört fut, a köröket rendre $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességgel futja. Mennyi a futó átlagsebessége a teljes távon? Milyen közepe az átlagsebesség a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek? Azonos-e ez a közép a körönkénti sebességek átlagával (számtani közepével)? Ha nem, melyik a nagyobb?

3.100. Az alábbiakban megpróbáljuk megoldani a következő egyenletet!

$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3} = 1$ Emeljük köbre mindkét oldalt!

$1 - x + 3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2 \sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2 + x - 3 = 1$

$-2 + 3\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3}\right) = 1$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon a zárójelben levő összeg az eredeti egyenlet szerint 1.

$\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3}=1$

$(1-x)(x-3)=1$

$x=2$

Tényleg megoldás ez? Mit rontottunk el? Gondoljuk végig, hogy a fenti levezetés mit bizonyít, és mit nem bizonyít!

Futó Bendegúz 20 kört fut, és a köröket rendre $v_1,\dots,v_{20}$ sebességgel futja. Szaladó Zebulon 20 percig fut, a sebességét percenként változtatja, a k-adik percben v_k sebességgel fut ($k=1,2,\dots,20$).

3.101. Számítsuk ki Futó Bendegúz és Szaladó Zebulon átlagsebességét a teljes távon, és határozzuk meg, hogy melyik középpel számolhatók az átlagsebességek a megfelelő $v_1,\dots,v_{20}$ sebességekből!

3.102. Melyik futónak nagyobb az átlagsebessége?

3.103. Adjunk meg olyan pozitív egész K számot, amelyre igaz, hogy ha $n>K$ pozitív egész, akkor $\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{1000}$. Hány megoldása van a feladatnak?

Van-e olyan $n\in\mathbb{N}$, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

3.104. $\sqrt[n]{999}<1{,}001$

3.105. $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n}>100$

Van-e olyan $n\in\mathbb{N}$, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

3.106. $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n^2}>100?$

3.107. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>n$

3.108. Bizonyítsuk be, hogy ha három nemnegatív szám szorzata 1, akkor összegük legalább 3 !

Van-e olyan $n\in\mathbb{N}$, amelyre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

3.109. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>100$

3.110. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>n$

3.111. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{n}{2}+2$

3.112. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>10\cdot\sqrt[3]{n}$

3.113. Legyen egy téglalap két oldala a és b, átlója pedig c. Ekkor a téglalap területe $T=ab$, és a téglalap kerülete $K=2(a+b)$.

Tehát $\frac{T}{\frac{K}{2}}=\frac{ab}{\frac{2(a+b)}{2}}$.

Így $\frac{2T}{K}-\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{ab}{a+b}-\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Mivel $0<a<c$, ezért $a\left(\frac{2T}{K}-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)<c\left(\frac{ab}{a+b}-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$.

Beszorzás után: $\frac{2Ta}{K}-\frac{ac}{\sqrt{2}}<\frac{abc}{a+b}-\frac{c^2}{\sqrt{2}}$.

T és K helyébe írjunk ab-t és $2(a+b)$-t: $\frac{2a^2b}{2(a+b)}-\frac{ac}{\sqrt{2}}<\frac{abc}{a+b}-\frac{c^2}{\sqrt{2}}$.

Rendezés után: $\frac{2a^2b}{2(a+b)}-\frac{abc}{a+b}<\frac{ac}{\sqrt{2}}-\frac{c^2}{\sqrt{2}}$.

Kiemelés után: $\frac{ab}{a+b}(a-c)<\frac{c}{\sqrt{2}}(a-c)$.

Osztunk $(a-c)$-vel, de $a<c$, így $a-c<0$ $\frac{ab}{a+b}>\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Négyzet esetén $b=a$ és $c=a\sqrt{2}$. $\frac{a^2}{2a}>\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Egyszerűsítés és rendezés után: $1>2$.

Hol a hiba?

3.114. Egy kereskedőnek nem pontos a kétkarú mérlege, mert a karok hossza nem egyenlő. Miután tudja ezt, minden vásárlónál az áru egyik felét a mérleg egyik serpenyőjében, a másik felét a mérleg másik serpenyőjében méri, gondolván, hogy ezzel kiküszöböli a mérleg pontatlanságát. Valóban ez a helyzet?

Tudjuk, hogy $a,b,c>0$ és $a+b+c=18$. Határozzuk meg a,b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke maximális legyen:

3.115. abc

3.116. a^3b^2c

3.117. a^2bc,

3.118. $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke minimális legyen:

3.119. $a+b+c$

3.120. $3a+2b+c$

3.121. $2a+b+c$,

3.122. $a^2+b^2+c^2$.

3.123. Bizonyítsuk be, hogy minden $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós számra

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

3.124. Bizonyítsuk be, hogy minden $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$ pozitív valós számra

$$|a_1b_1+\ldots+a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}!$$

3.125. Huszonöt szuper intelligens éhes oroszlán közé egy darab oszthatatlan hús kerül. Ha valamelyik megeszi, akkor elalszik, és amíg alszik, a többiek úgy tekintenek rá, mint egy darab oszthatatlan húsra. A fentieket az oroszlánok is tudják. Mi fog történni?

4. Sorozatok határértéke

Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat! (A megadott sorozat monoton növekvő-e, szigorúan monoton növekvő-e, monoton csökkenő-e, illetve szigorúan monoton csökkenő-e? Ha nem, akkor létezik-e olyan index, amelytől kezdve a sorozat monoton?)

4.1. $1 + \frac{1}{n}$

4.2. $\frac{2^n}{n!}$

4.3. $\frac{n^3}{2^n}$

4.4. $(-1)^n \sqrt{n}$

4.5. $\sin\left(\frac{5\pi}{12} n\right)$

4.6. $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

4.7. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

4.8. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

4.9. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

4.10. $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

4.11. $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából a következő sorozatokat! (Alulról korlátos-e, felülről korlátos-e, korlátos-e a megadott sorozat?)

4.12. $\frac{n+2}{n}$

4.13. $n^2 - n$

4.14. $\left(-\frac{4}{7}\right)^n$

4.15. $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$

4.16. $\sin(4n^2 - n)\cos(4n^2 + 1)$

4.17. $\left(\frac{n-5}{n}\right)^n$

4.18. $\frac{2^n}{n}$

4.19. $\frac{4^n}{n^2}$

4.20. $\operatorname{tg}(n\pi)$

4.21. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

4.22. $(-1)^n \ln n$

4.23. Monoton-e, korlátos-e az $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ sorozat?

Írjuk fel logikai jelekkel (de a tagadás jele nélkül) az alábbi állításokat!

4.24. Az (a_n) sorozat felülről korlátos.

4.25. Az (a_n) sorozat felülről nem korlátos.

4.26. Az (a_n) sorozat monoton növekvő.

4.27. Az (a_n) sorozat nem monoton növekvő.

4.28. Az (a_n) sorozat monoton.

4.29. Az (a_n) sorozat nem monoton.

4.30. Az (a_n) sorozat tart 5-höz.

4.31. Az (a_n) sorozat nem tart 5-höz.

4.32. Az (a_n) sorozat a π számhoz tart.

4.33. Az (a_n) sorozat nem tart a π számhoz.

4.34. Az (a_n) sorozat konvergens.

4.35. Az (a_n) sorozat divergens.

4.36. Az (a_n) sorozat végtelenhez tart.

4.37. Az (a_n) sorozat nem tart végtelenhez.

4.38. Az (a_n) sorozat nem tart mínusz végtelenhez.

4.39. Az (a_n) sorozat oszcillálva divergens.

4.40. Az (a_n) sorozat nem oszcillálva divergens.

Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$. Következnek-e ebből az alábbi állítások?

4.41. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(n > n_0 \implies |5 - a_n| < \varepsilon)$

4.42. $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R}^+)\, |a_n| < K$

A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok konvergensek!

4.43. $\dfrac{1}{2n}$

4.44. $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

4.45. $\dfrac{n-1}{n}$

A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok konvergensek! Adjunk meg küszöbindexet az $\varepsilon = 10^{-4}$ hibakorláthoz!

4.46. $1 + \dfrac{1}{n^2}$

4.47. $\dfrac{2}{3n-1}$

4.48. $\dfrac{4n+3}{2n+1}$

4.49. $\dfrac{1}{n}\sin n$

4.50. $(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok konvergensek! Adjunk meg küszöbindexet az $\varepsilon = 10^{-2}$ hibakorláthoz!

4.51. $\dfrac{n}{n^2+1}$

4.52. $\dfrac{n^2}{n^2+1}$

4.53. $\dfrac{n+1}{n-1}$

A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen! Adjunk meg küszöbindexet a $P = 10^3$ számhoz!

4.54. n^2

4.55. $4n^3$

4.56. 2^n

4.57. $n!$

4.58. $\ln n$

A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok határértéke mínusz végtelen! Adjunk meg küszöbindexet a $P = -10^6$ számhoz!

4.59. $-2n+1$

4.60. $-n^4$

4.61. -3^n

Következik-e az alábbi állításokból, hogy a sorozat konvergens?

4.62. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(n > n_0 \implies |a_n - 5| < 2\varepsilon)$

4.63. $(\forall n \in \mathbb{N}^+)\, |a_n| < 5$

Mi a következő sorozatok határértéke? Ha véges a határérték, akkor mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, ha végtelen, akkor $P = 10^6$-hoz, ha mínusz végtelen, akkor $P = -10^6$-hoz!

4.64. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4.65. $\dfrac{3n^6 - n + 2}{2n^6 + 1}$

4.66. $\dfrac{1}{1 - \sqrt{n}}$

4.67. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4.68. $n - \sqrt{n}$

4.69. $\dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n}$

4.70. $\dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n}$

4.71. $\dfrac{n^2 - 10n}{10n + 100}$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz küszöbindexet!

4.72. $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$

4.73. $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$

4.74. $\sqrt[8]{n}$

4.75. $\sqrt[n]{8}$

Melyik sorozat korlátos alulról, melyik korlátos felülről, és melyik sorozat korlátos? Melyik sorozat konvergens, melyik divergens? Melyik sorozatnak van határértéke? Adjuk meg a létező határértékeket, és indokoljuk meg az eredményeket!

4.76. $a_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ prím} \\ 2 - \dfrac{1}{n} & \text{egyébként} \end{cases}$

4.77. $a_n = -1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4.78. $a_n = 2^{-n}$

4.79. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

4.80. $a_n = n^{-2}$

4.81. $a_n = (-1)^n + 3$

4.82. $a_n = \left(-\frac{5}{3}\right)^n$

4.83. $a_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n$

4.84. $a_n = \sqrt[8]{n}$

4.85. $a_n = \sqrt[n]{8}$

4.86. Igazoljuk, hogy tetszőleges (a_n) sorozatra az alábbi két állítás ekvivalens!

(i) $a_n \to 0$

(ii) $|a_n| \to 0$

4.87. Igazoljuk, hogy pozitív tagú (a_n) sorozatra az alábbi két állítás ekvivalens!

(i) $a_n \to 0$

(ii) $\frac{1}{a_n} \to \infty$

4.88. Mutassunk példát olyan pozitív tagú sorozatra, amelyik nem korlátos, de nem tart végtelenhez!

4.89. Bizonyítsuk be, hogy ha $q > 1$, akkor $q^n \to \infty$.

4.90. Bizonyítsuk be, hogy ha $|q| < 1$, akkor $q^n \to 0$.

Melyik sorozat konvergens, melyik divergens, melyiknek van határértéke, és mi a határérték?

4.91. $a_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.92. $a_n = \begin{cases} 3n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 4n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.93. $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$

4.94. $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

4.95. $\sqrt[n]{7 + \sin n}$

4.96. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

4.97. $\dfrac{2^n}{3^n}$

4.98. 2^{-n}

4.99. $n!$

4.100. $\sqrt{n^2+1}-n$

4.101. $\sqrt{n^2+n}-n$

4.102. $\dfrac{n+\sin n}{\sqrt{n^2+1}}$

Melyik sorozat konvergens, melyik divergens, melyiknek van határértéke, és mi a határérték?

4.103. $a_n = \begin{cases} -n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.104. $b_n = \begin{cases} -3n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

4.105. $\sqrt{n^2+1}$

4.106. $\sqrt[n]{3^n-2^n}$

4.107. $\sqrt[n]{7-\cos n}$

4.108. $\sqrt{n^2-1}-n$

4.109. $\sqrt{n^2-n}-n$

4.110. $\dfrac{n+\sin n}{n+\cos n}$

4.111. $\sqrt[n]{n^2}$

4.112. $\sqrt[n]{n^2+n}$

4.113. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}}$

4.114. $\sqrt[3]{n^2-10n}$

Számoljuk ki a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.115. $\dfrac{n^5+5n-1}{n^2-n^6+1}$

4.116. $\dfrac{3n^2+2n+1}{n+2n^2}$

4.117. $\dfrac{2n^4-3n^2}{n^2-6n+1}$

4.118. $\dfrac{2n^2-3n^3+1}{n^2-7}$

4.119. $\dfrac{4n^2-3n}{5n-7n^2}$

4.120. $\dfrac{10n^2+2-7n}{2-n^3}$

4.121. $\dfrac{n^2+3}{\sqrt{n^4+4n}}$

4.122. $\dfrac{2n^2+3n+n^3}{2n^3+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4.123. $\dfrac{n\sin n+n^2\cos n}{n^3}$

4.124. $\dfrac{2n^2+3n+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{5n^7+n^3+1}}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.125. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

4.126. $\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}$

4.127. $\sqrt{n^2+n}-n$

4.128. $\sqrt{n^2-n}-n$

4.129. $\sqrt{n^2-1}-n$

4.130. $\sqrt[n]{n^2+n}$

4.131. $\sqrt[n]{n^7-7n}$

4.132. $\sqrt[n]{4^n+5^n}$

4.133. $\sqrt[n]{2\cdot 4^n+5^{n-1}}$

4.134. $\sqrt[n]{2^{2n}+3^{n+1}}$

4.135. $\sqrt[n]{n!}$

Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

4.136. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

4.137. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

4.138. $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

4.139. $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

4.140. $\left(1+\frac{1}{6n}\right)^n$

4.141. $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n-1}$

4.142. $\left(1+\frac{1}{7n}\right)^{2n-1}$

Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét, ha vannak!

4.143. $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

4.144. $\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n+1}.$

4.145. $\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n+2}$

4.146. $\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{4n+1}$

Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét, ha vannak!

4.147. $\frac{3\cdot 2^{n-1}+2\cdot 5^{n+1}}{7\cdot 2^{2n}-5\cdot 3^{n+1}}$

4.148. $\frac{n-25^{n-1}}{5^{2n+1}-3n^4}$

4.149. $\dfrac{3^n + n^3}{n^n + 3^3}$

4.150. $\dfrac{\sqrt{n}\,2^{n+5}}{5^n + 5^{-n}}$

4.151. $\dfrac{n! - 2^n}{1 + n^5 10^n}$

4.152. $\dfrac{n^2 10^{n+2} - 3n^{2019}}{5^{2n} + \ln n}$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, ha vannak!

4.153. $\dfrac{n\,2^n - 5^{n-1}}{3^{2n}}$

4.154. $\dfrac{2n^{99} - n^2 2^{2n}}{2n^4 + 3 \cdot 4^{n-1}}$

4.155. $\dfrac{n^{100} - \sqrt{n}\,(n^2+1)}{2^{n-1000}}$

4.156. $\dfrac{\sqrt{n} + 4^{n-1} - 3n^2}{3^n - 7n + n!}$

4.157. $\dfrac{2\,n^3 3^n - 2^{2n-2}}{n^4 - n + 1}$

4.158. $\dfrac{\sqrt{n}\,5^n - 2^{3n+2}}{n^{100} + 3^{2n-1}}$

Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét, ha vannak!

4.159. $\sqrt[n]{2^{2n} + 3^{n+4} + 1}$

4.160. $\sqrt[n]{2 \cdot 3^{3n+1} + 8 \cdot 5^{2n-1}}$

4.161. $\sqrt[n]{7 \cdot 3^{2n+3} - 2^{3n+2}}$

4.162. $\sqrt[n]{n8^n + 3^{2n}}$

4.163. $\sqrt[n]{4^n - n^4}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.164. $3^{3^{-n} - \sqrt[n]{3}}$

4.165. $\operatorname{arctg}\sqrt{n}$

4.166. $\cos\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

4.167. $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n/3}$

4.168. $\dfrac{n^5}{(-3)^n}$

4.169. $\sqrt{\operatorname{arctg} n}$

4.170. $\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}$

4.171. $\cos\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$

4.172. $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n/3}$

4.173. $\dfrac{n^7}{(-2)^n}$

4.174. $\sqrt{\operatorname{arctg} 2n}$

4.175. $\sqrt[n]{\operatorname{arctg} n}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.176. $0{,}99^n n^2$

4.177. $\dfrac{3^n - \sqrt{n} + n^{10}}{2^n - \sqrt[n]{n} + n!}$

4.178. $\sqrt[n]{2^n - n^2}$

4.179. $\dfrac{(-10)^n}{n!}$

4.180. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

4.181. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

4.182. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$

4.183. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.184. $0{,}9^n n^3$

4.185. $\sqrt[n]{3^n - n^3}$

4.186. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

4.187. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+3}$

4.188. $\left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{3n}$

4.189. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{6n}$

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha vannak!

4.190. $\dfrac{(-10)^n}{n!}$

4.191. $\sqrt[3]{n! + 5^n - n^n}$

4.192. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

4.193. $(5^n - n!) \cdot 0{,}3^n$

4.194. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2} n$

4.195. $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

4.196. $n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

4.197. $\sqrt{\sqrt[n]{3} + 2^{-n} + n^{-1/n}}$

4.198. Legyen $a > 1$ és $a_n \to a$. Mutassuk meg, hogy $a_n^n \to \infty$.

4.199. Mutassuk meg, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor $a_n^n \to \infty$.

4.200. Legyen $|a| < 1$ és $a_n \to a$. Mutassuk meg, hogy $a_n^n \to 0$.

4.201. Mi lehet az (a_n^n) sorozat határértéke, ha $a_n \to 1$?

4.202. Mi lehet az (a_n^n) sorozat határértéke, ha $a_n \to 0$?

4.203. Igazoljuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

4.204. Igazoljuk, hogy minden a pozitív számra $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4.205. Mutassuk meg, hogy ha a nemnegatív tagú (a_n) sorozat konvergens és a határértéke pozitív szám, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

4.206. Mi lehet az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozat határértéke, ha (a_n) nemnegatív tagú és $a_n \to \infty$?

4.207. Mi lehet az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozat határértéke, ha (a_n) nemnegatív tagú és $a_n \to 0$?

Igazoljuk az alábbi állításokat!

4.208. $\dfrac{1}{n}\sin n \to 0$

4.209. $n \sin \dfrac{1}{n} \to 1$

4.210. $\inf\{\sqrt[n]{2} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\} = ?$

4.211. Mutassuk meg, hogy az (a_n) sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha létezik olyan K valós szám, melyre $|a_n| \leq K$ minden n indexre!

4.212. Igazoljuk, hogy korlátos sorozatok szorzata korlátos!

4.213. Igaz-e, hogy korlátos sorozatok hányadosa korlátos, ha a nevező egyik tagja sem nulla?

4.214. Igaz-e, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, akkor az (a_n+b_n) is konvergens?

4.215. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $(a_n + b_n)$ divergens?

4.216. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $(a_n - b_n)$ divergens?

Legyen (a_n) és (b_n) két divergens sorozat! Igazak-e ekkor a következő állítások?

4.217. (a_n) és (b_n) összege mindig divergens.

4.218. (a_n) és (b_n) szorzata mindig divergens.

4.219. Igaz-e, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens?

4.220. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $(a_n \cdot b_n)$ divergens?

4.221. Igaz-e, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat pedig divergens, akkor $(a_n \cdot b_n)$ konvergens?

4.222. Egy sorozat $0{,}000001$-hez konvergál. Lehet-e a sorozatnak negatív tagja? Lehet-e a sorozatnak végtelen sok negatív tagja?

4.223. Egy sorozatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van. Lehet-e konvergens?

Ekvivalensek-e a következő állítások azzal, hogy b határértéke az (a_n) sorozatnak?

4.224. Bármely $\varepsilon > 0$-ra az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez.

4.225. Bármely $\varepsilon > 0$-ra az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van b-től legalább ε távolságban.

4.226. Van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez.

4.227. Van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van b-től legalább ε távolságban.

Tegyük fel, hogy az a_n sorozat ∞-hez divergál. Következnek-e ebből a következő állítások?

4.228. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja.

4.229. Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja.

Melyik állításból következik, hogy a sorozat végtelenhez divergál?

4.230. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja.

4.231. Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja.

4.232. Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja, és a sorozat szigorúan monoton nő.

4.233. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja, és a sorozat szigorúan monoton nő.

Írjuk fel logikai jelekkel, de a határérték jelölései és tagadásjel (valamint $\nexists$ és $\nforall$ jelek) nélkül az alábbi állításokat!

4.234. Az (a_n) sorozat nem tart $-\infty$-hez.

4.235. A (b_n) sorozat oszcillálva divergens.

Igazoljuk, hogy bármely k pozitív egész és $a > 1$ valós számra teljesülnek a következő állítások!

4.236. $\log_a n \to \infty$

4.237. $\sqrt[k]{n} \to \infty$

4.238. $n^k \to \infty$

4.239. $a^n \to \infty$

4.240. $n! \to \infty$

4.241. $n^n \to \infty$

Igazoljuk, hogy bármely k pozitív egész és $a > 1$ valós számra teljesülnek az alábbi állítások!

4.242. $\dfrac{\log_a n}{n} \to 0$

4.243. $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0$

4.244. $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$

4.245. $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$

4.246. Írjuk fel az $a_n \to \infty$ és az $a_n \to -\infty$ definícióját a „minden elég nagy n-re” kifejezés segítségével!

4.247. Bizonyítsuk be a rendőrszabályt végtelen határérték esetében!

4.248. A határérték és műveletek kapcsolatáról szóló tételben a kritikus határértékek helyére „?” került, mert ott bármi állhat. Adjunk példákat a lehetséges esetekre!

4.249. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata?

A: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

B: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

4.250. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata, ha (a_n) és (b_n) végtelenhez tartó sorozatok?

A: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

B: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

4.251. Tegyük fel, hogy $\forall n \quad a_n \neq 0$ és $b_n \neq 0$. Igaz-e ekkor, hogy $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0 \iff \dfrac{b_n}{a_n} \to \infty$?

4.252. Tegyük fel, hogy $\forall n \quad a_n \neq 0$ és $b_n \neq 0$, továbbá $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$. Igaz-e ekkor, hogy $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0 \iff \dfrac{b_n}{a_n} \to \infty$?

Mutassunk példát olyan $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$ sorozatokra, melyekre teljesülnek a következő állítások!

4.253. $a_n - b_n \to 0$

4.254. $a_n - b_n \to 5$

4.255. $a_n - b_n \to -1$

4.256. $a_n - b_n \to \infty$

4.257. $a_n - b_n \to -\infty$

4.258. Az $(a_n - b_n)$ sorozatnak nincs határértéke.

Mutassunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ és teljesülnek a következő állítások!

4.259. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

4.260. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=7$

4.261. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-7$

4.262. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$

4.263. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-\infty$

4.264. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ nem létezik

Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre $a_n\to\infty$, $b_n\to-\infty$ és teljesülnek a következő állítások?

4.265. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

4.266. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=7$

4.267. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-7$

4.268. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$

4.269. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\infty$

4.270. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ nem létezik

Mutassunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, és teljesülnek a következő állítások!

4.271. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$

4.272. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\frac{1}{2}$

4.273. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=1$

4.274. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=7$

4.275. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=-2$

4.276. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=-7$

4.277. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$

4.278. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=-\infty$

4.279. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$ nem létezik

Mi a P és Q állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

4.280. **P:** $a_n\to 0$ **Q:** $|a_n|\to 0$

4.281. **P:** $a_n\to 3$ **Q:** $|a_n|\to 3$

4.282. Bizonyítsuk be, hogy két, mínusz végtelenhez tartó sorozat összege is mínusz végtelenhez tart!

4.283. Tegyük fel, hogy $a_n \to 2$. Mi a határértéke az (a_n^n), illetve, az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozatoknak?

4.284. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4.285. Írjuk fel az alábbi sorozatokat nagyságrend szerinti sorba!

(a) (n^7) **(b)** $(n^2 + 2^n)$ **(c)** $(100\sqrt{n})$ **(d)** $(n!/10)$

4.286. Keressük meg az alábbi sorozatok között az összes aszimptotikusan egyenlő párokat!

(a) $(n!)$ **(b)** (n^n) **(c)** $(n! + n^n)$ **(d)** $(\sqrt{n})$

(e) $(\sqrt[n]{n})$ **(f)** $(\sqrt{n+1})$ **(g)** $(\sqrt[n]{2})$ **(h)** $(\sqrt{n^2})$

4.287. Legyenek (a_n) és (b_n) végtelenhez tartó sorozatok. Mi az (a) és (b) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

(a) $a_n \sim b_n$ **(b)** $a_n - b_n \to 0$

4.288. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozat gyorsabban tart végtelenhez, mint a (b_n) sorozat, és a (b_n) sorozat gyorsabban tart végtelenhez, mint a (c_n) sorozat, akkor az (a_n) sorozat gyorsabban tart végtelenhez, mint a (c_n) sorozat!

Legyen $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ és $b_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$.
Bizonyítsuk be a következő állításokat!

4.289. Minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $b_n = 2 - \frac{1}{n}$.

4.290. Minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $a_n \leq b_n$.

4.291. Az (a_n) sorozat korlátos.

4.292. Az (a_n) sorozat monoton.

4.293. Az (a_n) sorozat konvergens.

Van-e a következő sorozatoknak konvergens részsorozatuk?

4.294. $(-1)^n$

4.295. $\sin n$

4.296. $\dfrac{1}{n}$

4.297. $\sqrt{n}$

4.298. $\sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

4.299. $\{\sqrt{n}\}$

4.300. Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor a sorozat konvergens?

Van-e a következő sorozatoknak konvergens részsorozatuk?

4.301. $(-2)^n$

4.302. $\cos \sqrt{n}$

4.303. $\dfrac{3}{n^2+1}$

4.304. $\{\sqrt{n}\}$

4.305. Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak van divergens részsorozata, akkor a sorozat divergens?

4.306. Mutassunk olyan sorozatot, amelynek van végtelenhez tartó, mínusz végtelenhez tartó és 0-hoz tartó részsorozata is!

4.307. Milyen határértéke lehet egy olyan sorozatnak, amelynek van 1-hez tartó részsorozata is és 2-höz tartó részsorozata is?

4.308. Határozzuk meg az $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ és $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ sorozatok határértékét!

Írjuk fel logikai jelekkel (de a tagadás jele nélkül) az alábbi állításokat!

4.309. Az (a_n) sorozat Cauchy-sorozat.

4.310. Az (a_n) sorozat nem Cauchy-sorozat.

4.311. Igazoljuk, hogy az $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sorozat Cauchy-sorozat!

4.312. Írjuk fel a Cauchy-kritérium tagadását egy (a_n) sorozatra! Mi a felírt állítás logikai kapcsolata az „(a_n) divergens” állítással?

Mi a logikai kapcsolata az „(a_n) sorozat konvergens” állításnak a következő állításokkal?

4.313. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$

4.314. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}-a_n)=0$

4.315. Írjuk fel a Cauchy-kritérium tagadását egy (a_n) sorozatra! Mi a felírt állítás logikai kapcsolata az „(a_n) divergens” állítással?

4.316. Tegyük fel, hogy minden n, m-re $|a_n - a_m| < \dfrac{1}{n+m}$. Bizonyítsuk be, hogy (a_n) konvergens!

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

4.317. **P:** Az (a_n) sorozat konvergens.
Q: $|a_{n+2} - a_n| \to 0$

4.318. **P:** Az (a_n) sorozat konvergens.
Q: $|a_{2n} - a_n| \to 0$

4.319. **P:** Az (a_n) sorozat konvergens.
Q: $|a_{n+1} - a_n| \to 0$

4.320. Igaz-e, hogy ha (a_{2n}) és (a_{2n+1}) konvergens, akkor (a_n) konvergens?

4.321. Mutassuk meg, hogy ha az (a_n) sorozat (a_{2n}) és (a_{2n-1}) részsorozata konvergens, és e két részsorozat határértéke egyenlő, akkor (a_n) konvergens!

4.322. Igaz-e, hogy ha (a_{2n}) és (a_{3n}) konvergens, akkor (a_n) konvergens?

4.323. Igaz-e, hogy ha (a_{2n}), (a_{2n+1}) és (a_{3n}) konvergens, akkor (a_n) konvergens?

4.324. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $a_n \geq 0$, akkor az $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ sorozatnak van (véges vagy végtelen) határértéke!

4.325. Határozzuk meg az $\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}$ sorozat határértékét, ha van! (Az n-edik tagban n darab gyökjel és n darab 3-as van.)

4.326. Attól függően, hogy egy sorozat melyikkel rendelkezik a *„korlátos, monoton, konvergens”* tulajdonságok közül, 8 féle eset van. Adjunk példát ezek közül azokra, amelyek léteznek, és indokoljuk meg, hogy miért nem létezik a többi!

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha léteznek!

4.327. $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

4.328. $a_1 = 1{,}5$ és $a_{n+1} = -a_n + 1$

4.329. $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Számítsuk ki az alábbi rekurzív módon megadott sorozatok határértékét!

4.330. $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = 2a_n$

4.331. $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = (n+1)a_n$

4.332. $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

4.333. $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

4.334. $a_1 = \frac{3}{2}$ és $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$

4.335. $a_1 = 6$ és $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$

4.336. $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + 8)$

4.337. $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + 8)$

4.338. $a_1 = 5$ és $a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + 8)$

4.339. $a_1 = 0$ és $a_{n+1} = \frac{1}{13}(a_n^3 + 12)$

4.340. $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3 + 1}$

4.341. $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, ahol $a > 0$ adott

4.342. $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{a}{a_n^2}\right)$, ahol $a > 0$ adott

4.343. $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right)$, ahol $a > 0$ és k pozitív egész

Hova tarthat a $(b_n)^n$ sorozat a következő feltételek mellett?

4.344. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$

4.345. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

4.346. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$

4.347. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\frac{1}{3}$

4.348. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -3$

4.349. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$

4.350. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

4.351. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1$

Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

4.352. $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

4.353. $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

5. Függvények lokális és globális tulajdonságai

Lehet-e valós függvény grafikonja az alábbi két halmaz?

5.1. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 - 2x + y^2 = 0\}$

5.2. $\{(\sin x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

5.3. Injektív-e az $f(x) = x^3 - x$, $D(f) = \mathbb{R}$ függvény?

5.4. Mutassunk példát olyan valós függvényre, melyre $f^{-1} = f$, és f nem olyan függvény, amelyik az értelmezési tartományának minden eleméhez önmagát rendeli (nem az identitás)!

Határozzuk meg a következő függvények inverzét, ha az létezik!

5.5. $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = \mathbb{R}$

5.6. $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = (-\infty, 3]$

5.7. $f(x) = 2x^3 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$

5.8. $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

5.9. $f(x) = x^2$, $D(f) = (-\infty, -1]$

Határozzuk meg az alábbi kompozíciókat!

5.10. $f(x) = x + 4$, $D(f) = \mathbb{R}$ és $g(x) = x^2$, $D(g) = \mathbb{R}$. $f \circ g = ?$ $g \circ f = ?$

5.11. $f(x) = \ln(-x)$, $D(f) = (-\infty, 0)$ és $g(x) = x + 1$, $D(g) = \mathbb{R}$. $f \circ g = ?$ $g \circ f = ?$

5.12. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $D(f) = \mathbb{R}$. $f \circ f = ?$ $(f \circ f) \circ f = ?$ $f \circ (f \circ f) = ?$

5.13. Mutassuk meg, hogy a függvények kompozíciója asszociatív, azaz bármely f, g és h függvényre $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$!

5.14. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény szigorúan monoton és van inverze, akkor az inverze is szigorúan monoton.

5.15. Milyen a-ra konvex, milyen a-ra konkáv $(0, \infty)$-ben az x^a függvény?

5.16. Mit kapunk, ha $f(x) = x^a$-ra felírjuk a Jensen egyenlőtlenséget $t_1 = \cdots + t_n = \dfrac{1}{n}$ súlyokkal?

5.17. Milyen eredményt kapunk az előző feladatban az $a = -1$ speciális esetben?

5.18. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{x}$ függvény konkáv!

5.19. Bizonyítsuk be, hogy a $-\sqrt{x}$ függvény konvex!

5.20. Van-e olyan nem konstans függvény, amely $\mathbb{R}$-en konkáv és mindenütt pozitív?

5.21. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény differenciálható és konvex az I intervallumon, akkor itt a függvénygrafikon érintői a grafikon alatt vannak (pontosabban a grafikon semelyik pontja sincs semelyik érintő alatt)! (Segítség: indirekt + Lagrange-középértéktétel.)

Írjuk fel logikai jelekkel (de a tagadás jele nélkül) az alábbi állításokat!

5.22. Az f függvény határértéke az a pontban az L szám.

5.23. Az f függvénynek nem határértéke az a pontban az L szám.

5.24. Az f függvénynek nincs valós határértéke az a pontban.

5.25. Az f függvény határértéke az a pontban a végtelen.

5.26. Az f függvénynek nem határértéke az a pontban a végtelen.

5.27. Az f függvény határértéke a mínusz végtelenben az L szám.

5.28. Az f függvénynek nem határértéke a mínusz végtelenben az L szám.

5.29. Az f függvény folytonos az a pontban.

5.30. Az f függvény nem folytonos az a pontban.

Ha az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvényre létezik $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 7$, akkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igazak-e az alábbi összefüggések?

5.31. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 7$

5.32. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n^2) = 49$

5.33. $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt{n}) = 7$

Mondjuk ki a határértékekre vonatkozó átviteli elvet a következő esetekben!

5.34. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

5.35. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

5.36. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

5.37. **P:** Az $f(n)$ sorozat 5-höz tart.
Q: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$

5.38. **P:** Az $f\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat 5-höz tart.
Q: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 5$

5.39. Igaz-e, hogy ha f folytonos 0-ban, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$?

Bizonyítsuk be az átviteli elv segítségével, hogy a következő függvényeknek nincs határértékük a megadott helyen!

5.40. $\sin x$ -nek ∞-ben

5.41. $\sin \frac{1}{x}$ -nek 0-ban

5.42. $\operatorname{tg} x$ -nek $\frac{\pi}{2}$-ben

5.43. $\{x\}$ -nek ∞-ben

Bizonyítsuk be a Cauchy-kritérium segítségével, hogy a következő függvényeknek nincs határértékük a megadott helyen!

5.44. $\sin x$ -nek ∞-ben

5.45. $\sin \frac{1}{x}$ -nek 0-ban

5.46. $\operatorname{tg} x$ -nek $\frac{\pi}{2}$-ben

5.47. $\{x\}$ -nek ∞-ben

5.48. Adjunk minél több bizonyítást arra az állításra, hogy az $[x]$ függvény nem folytonos 0-ban!

5.49. Bizonyítsuk be átviteli elv segítségével, hogy ha az f függvény folytonos a-ban, a g függvény pedig folytonos $f(a)$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos a-ban!

5.50. Mi a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ és a $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 1$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ állítások logikai kapcsolata?

5.51. Igaz-e, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0)$?

5.52. Bizonyítsuk be az átviteli elv segítségével, hogy ha egy periodikus függvény nem konstans, akkor nincs határértéke a végtelenben!

Mondjuk ki, és bizonyítsuk be az alábbi határértékekre vonatkozó rendőrszabályt!

5.53. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$

5.54. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$

5.55. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Határozzuk meg a következő határértékeket!

5.56. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$

5.57. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$

5.58. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

5.59. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x}$

5.60. $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{x}$

5.61. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \sin \frac{1}{x}$

5.62. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \sin \frac{1}{x}$

5.63. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

Mondjuk ki a Cauchy-kritériumról szóló tételt az alábbi határértékekre!

5.64. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

5.65. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

5.66. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

5.67. Milyen halmaz lehet $f([a,b])$, ha f folytonos függvény?

5.68. Létezik-e olyan $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, melyre $x \sin x = \frac{\pi}{4}$?

5.69. Van-e olyan f valós függvény, melyre $D(f) = [0,3]$ és $\{x \in [0,3] : f(x) = 0\} = (0,2)$?

5.70. Van-e olyan f folytonos függvény, melyre $D(f) = [0,3]$ és $\{x \in [0,3] : f(x) = 0\} = (0,2)$?

5.71. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvény esetén $f([a,b])$ korlátos zárt intervallum vagy egyetlen pont!

5.72. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény differenciálható 0-ban, és $f(0) = 0$, akkor $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Mi lehet az értékkészlete egy valós függvénynek, ha az értelmezési tartománya az alábbi halmaz?

5.73. korlátos zárt intervallum

5.74. korlátos félig nyílt intervallum

5.75. korlátos nyílt intervallum

Mi lehet az értékkészlete egy folytonos függvénynek, ha az értelmezési tartománya az alábbi halmaz?

5.76. korlátos zárt intervallum

5.77. korlátos félig nyílt intervallum

5.78. korlátos nyílt intervallum

5.79. nem korlátos félig zárt intervallum

5.80. a valós számok halmaza

5.81. Egy függvényt Lipschitz-függvénynek hívunk, ha van olyan L konstans, amelyre $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ teljesül az értelmezési tartomány bármely x, y pontpárjára. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz-függvény az (a, b) intervallumon, akkor létezik a $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ határérték!

Írjuk fel logikai jelekkel, de a tagadás jele nélkül az alábbi állításokat!

5.82. Az f függvény egyenletesen folytonos.

5.83. Az f függvény nem egyenletesen folytonos.

Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények?

5.84. $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

5.85. $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = x$

5.86. $D(f) = [2, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

5.87. $D(f) = (0, 1)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

5.88. $D(f) = (0, 1)$, $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$

5.89. $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^2$

5.90. $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$

5.91. $D(f) = (-10^7, 10^7)$, $f(x) = x^2$

5.92. $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

5.93. $D(f) = [0, 6 \cdot 10^{23})$, $f(x) = x^3$

5.94. $D(f) = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^3$

5.95. $D(f) = (0, 100)$, $f(x) = \sqrt{x}$

5.96. $D(f) = [100, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

5.97. $D(f) = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

5.98. $D(f) = (0, \pi)$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

5.99. Igaz-e, hogy adott halmazon értelmezett két egyenletesen folytonos függvény összege is egyenletesen folytonos?

5.100. Igaz-e, hogy adott halmazon értelmezett két egyenletesen folytonos függvény szorzata is egyenletesen folytonos?

5.101. Igaz-e, hogy adott halmazon értelmezett két egyenletesen folytonos függvény hányadosa is egyenletesen folytonos, ha a nevező sehol sem nulla?

5.102. Igaz-e, hogy két egyenletesen folytonos függvény kompozíciója is egyenletesen folytonos?

5.103. Van-e olyan korlátos és folytonos függvény, amelyik nem egyenletesen folytonos?

6. Végtelen sorok

6.1. Igaz-e, hogy két konvergens végtelen sor összege konvergens?

6.2. Igaz-e, hogy két divergens végtelen sor összege divergens?

6.3. Igaz-e, hogy két nemnegatív tagú divergens végtelen sor összege divergens?

6.4. Igaz-e, hogy egy konvergens és egy divergens végtelen sor összege divergens?

Legyen (a_n) nemnegatív tagú sorozat.

6.5. Igaz-e, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens?

6.6. Igaz-e, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

6.7. Igaz-e, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ abszolút konvergens?

6.8. Következik-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergenciájából $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergenciája?

6.9. Legyen (a_n) olyan sorozat, melyre (na_n) konvergens, és határértéke nem nulla. Következik-e ebből $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciája vagy divergenciája?

6.10. Legyen (a_n) nemnegatív tagú monoton csökkenő sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

$\lim_{n\to\infty} na_n = ?$

6.11. Legyenek (a_n), (b_n) olyan pozitív tagú sorozatok, melyekre $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergens és határértéke nem nulla. Következik-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciájából $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergenciája, és fordítva, következik-e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergenciájából $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciája?

6.12. Igazoljuk, hogy ha q valós szám és $|q| < 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ abszolút konvergens!

6.13. Rögzített q valós szám esetén határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor összegét, ha az létezik!

Konvergensek-e a következő végtelen sorok? Számoljuk ki az összegüket, ha az létezik!

6.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}}$

6.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

6.16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7 \cdot 5^n}{3^{2n+1}}$

6.17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 4 \cdot 3^n}{5^{n+1}}$

6.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 5^{n-1}} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n+1}}\right)$

Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok? Határozzuk meg az összegüket, ha az létezik!

6.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

6.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

6.21. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 5n + 4}$

6.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Konvergensek-e a következő végtelen sorok? Számítsuk ki az összegüket, ha az létezik!

6.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

6.24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}$

6.25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

Konvergens-e a következő két végtelen sor? Amelyik konvergens, annál adjon meg olyan részletösszeget, amelyik 10^{-3}-nál kisebb hibával közelíti a végtelen sor összegét!

6.26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

6.27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!}$

Az összehasonlító kritériumok egyikének segítségével döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi végtelen sorok!

6.28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$

6.29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

6.30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

6.31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}}$

6.32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}+2}$

6.33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}-2}$

6.34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$

6.35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

6.36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{n}(n+1)}$

6.37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

A hányadoskritériumot vagy a gyökkritériumot alkalmazva mit állíthatunk az alábbi végtelen sorok konvergenciájáról?

6.38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

6.39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

6.40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+1}$

6.41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Döntsük el a hányadoskritériumot alkalmazva, majd a gyökkritériumot használva is, hogy konvergensek-e az alábbi végtelen sorok!

6.42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$

6.43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{n+1}}$

6.44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{1+2^{2n}}$

6.45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$

6.46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 8^n\, n!}{(2n)!}$

6.47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1848}}{e^{2n-1}}$

6.48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

6.49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

6.50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

6.51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$

6.52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

6.53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

6.54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

6.55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n}$

6.56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\right)^n$

6.57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}$

Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi végtelen sorok!

6.58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(2n+5)\,3^n}$

6.59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

6.60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{n^3+2n+1}$

6.61. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+e^n}{n^2-n}$

6.62. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln n^2 + n}$

6.63. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{n^2+n-1}$

6.64. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{5^{n-2}+n+1}$

6.65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

6.66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

6.67. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n\sqrt[3]{n}}$

6.68. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+2}{5n-3}\right)^{2n+1}$

6.69. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

6.70. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^3+1)}{n!}$

6.71. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^{2n}+3^n}$

6.72. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3n^2}{n^2+5n-4}\right)^n$

6.73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

6.74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

6.75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

6.76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n+1}$

6.77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$

Mely x valós számok esetén konvergensek a következő végtelen sorok?

6.78. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

6.79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

6.80. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$

6.81. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

7. Taylor-sorok

Határozzuk meg az alábbi függvények 0 körüli nulladik, első, második, harmadik, valamint n-edik Taylor-polinomját!

7.1. e^x

7.2. e^{-x}

7.3. $2x^2 - 3x + 4$

7.4. $\sin x$

7.5. $\log(1+x)$

7.6. $\dfrac{1}{1-x}$

7.7. e^{2x}

7.8. $-3x^2 + 2x + 1$

7.9. $\cos x$

7.10. $\dfrac{1}{1+x}$

7.11. $\dfrac{1}{1+2x}$

7.12. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)}{x^3} = 0$

7.13. Határozzuk meg a $2x^2-3x+4$ függvény 1 körüli nulladik, első, második, harmadik, valamint n-edik Taylor-polinomját!

7.14. Határozzuk meg a $\operatorname{ctg} x$ függvény $\dfrac{\pi}{2}$ körüli nulladik, első, második, harmadik, valamint n-edik Taylor-polinomját!

Megoldások

1. A logika alapjai

1.1. Szombaton.

1.2. Kedden, csütörtökön, pénteken, szombaton vagy vasárnap.

1.14. Tétel volt, hogy ha egy függvény differenciálható, akkor folytonos, továbbá minden folytonos függvénynek van primitív függvénye. Tehát nincs a feladat feltételeinek megfelelő függvény.

1.15. Az $|x|$ függvény folytonos, ezért van primitív függvénye, de $|x|$ a 0-ban nem differenciálható.

1.16. Nem, mert egy másik oroszlán lehet más színű.

1.17. Mutat más (nem fekete) színű oroszlánt.

1.18. Gerzson: Mutat olyan 2-re végződő négyzetszámot, amely nem osztható 3-mal.

Frigyesnek van igaza, mert nem létezik 2-re végződő négyzetszám, így nincs ellenpélda Frigyes állítására.

1.19. Legyenek n, $n+1$, $n+2$ egymást követő egész számok. Ekkor $n+(n+1)+(n+2) = 3(n+1)$ osztható 3-mal minden n egész számra.

1.20. Mutat egy másodfokú egyenletet, melynek negatív gyökei vannak. Ilyen egyenlet például $x^2 + 3x + 2 = 0$.

1.21. Megoldja a másodfokú egyenletet, és kiderül, hogy az együtthatók minden lehetséges értékére legfeljebb két gyök van.

1.29. $b \mid 2520$ és $c \mid 2520$

1.30. $c \mid 2520$

1.31. $b \nmid 2520$

1.32. $b \nmid 2520$ és $c \nmid 2520$

1.33. **(a)** és **(b)** nem következik, **(c)** következik.

1.34. Az 1-et mindenképpen beleválasztjuk a részhalmazba, a többi 99 szám mindegyikénél kétféle lehetőségünk van. Ezért a megoldások száma 2^{99}.

1.35. Az 1 és a 2 szám eleme a részhalmaznak, a többi 98 szám mindegyikénél kétféle lehetőség áll rendelkezésünkre, ezért a kérdéses részhalmazok száma 2^{98}.

1.36. Három egymást páronként kizáró lehetőség van: 1 és 2 is benne van a keresett részhalmazban, 1 benne van és 2 nincs benne a keresett részhalmazban, 1 nincs benne és 2 benne van a keresett részhalmazban. Mindhárom esetben a részhalmazok száma 2^{98}, így az eredmény $3 \cdot 2^{98}$.

Más megoldás:

H összes részhalmazának száma 2^{100}, a vizsgált tulajdonsággal nem rendelkező részhalmazok száma 2^{98}, ezért a kérdéses részhalmazok száma $2^{100} - 2^{98} = 3 \cdot 2^{98}$.

1.37. $3 \cdot 2^{98}$.

1.38. Összesen 100 részhalmaz van. Ezekből a feladatnak csak azok nem felelnek meg, amelyekben az 1 nincs benne, és a 2 benne van. A maradék 98 szám mindegyikénél kétféle lehetőségünk van. Tehát a „rossz” részhalmazok száma 2^{98}, vagyis a feladatnak $2^{100} - 2^{98} = 3 \cdot 2^{98}$ részhalmaz felel meg.

1.39. Összesen 100 részhalmaz van. Ezekből a feladatnak csak azok nem felelnek meg, amelyekben az 1 benne van a részhalmazban, és a 2 nincs benne. A maradék 98 szám mindegyikénél kétféle lehetőségünk van. Tehát a „rossz” részhalmazok száma 2^{98}, vagyis a feladatnak $2^{100} - 2^{98} = 3 \cdot 2^{98}$ részhalmaz felel meg.

1.41. Következik, indirekt módon látjuk be. Tegyük fel, hogy $y - 2$ benne van H-ban, akkor azzal együtt, hogy $y - 1$ benne van H-ban, a feladat feltétele szerint y is benne van H-ban, ami ellentmondás.

1.43. A **P** állítás pontosan akkor hamis, ha van olyan bolhás macska, amelyik nem vakarózik. Ez éppen a **Q** állítás tagadása, tehát a **Q** állítás is pontosan ekkor hamis. Tehát a két állítás ekvivalens, ezért mindkettőből következik a másik.

1.44. **(a)** és **(b)** nem következik, **(c)** következik.

1.50. Hamis, mert ellenpélda $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{\{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}$.

1.53. Igaz. Ha ugyanis $x \in A$, akkor $A \subset B$ miatt $x \in B$, majd $B \subset C$ szerint $x \in C$ teljesül.

1.54. Hamis, mert ellenpélda $A = 0$, $B = \{0\}$, $C = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$.

1.65. $(\neg A \Longrightarrow B) = (A \vee B)$ tagadása: $\neg A \wedge \neg B$.

$\neg A \Longrightarrow B$ igazságtáblázata:

A	B	$\neg A \Longrightarrow B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

$\neg A \wedge \neg B$ igazságtáblázata:

A	B	$\neg A \wedge \neg B$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	i

1.66. $(\neg B \Longrightarrow \neg A) = (B \vee \neg A)$ tagadása: $\neg B \wedge A$.

$\neg B \Longrightarrow \neg A$ igazságtáblázata:

A	B	$\neg B \Longrightarrow \neg A$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

$\neg B \wedge A$ igazságtáblázata:

A	B	$\neg B \wedge A$
i	i	h
i	h	i
h	i	h
h	h	h

1.71. Van olyan x, amelyik eleme H-nak.

(Jelentése: A H halmaz nem az üres halmaz.)

1.72. Van olyan x, amelyhez van olyan y, amelyekre teljesül, hogy x eleme H-nak és y eleme H-nak, és $x \neq y$.

(Jelentése: A H halmaz legalább kételemű.)

1.73. A H halmaz minden x és y eleme és minden z valós szám esetén az $x < z < y$ egyenlőtlenségből következik, hogy z is eleme H-nak.

(Jelentése: H intervallum.)

1.74. A p egész szám prímszám:

$$(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(p|ab \Longrightarrow p|a \vee p|b).$$

A prímszámok halmaza:

$$\{p \in \mathbb{Z} : (\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(p|ab \Longrightarrow p|a \vee p|b)\}.$$

1.75. Nem kék az ég, vagy nem zöld a fű.

1.76. Van olyan korán kelő, aki nem lel aranyat.

1.77. Van olyan tengerész, aki még nem járt kocsmában.

1.78. Minden kocsmában járt már tengerész.

1.79. Van olyan tengerész, aki az általa ismert minden kikötő minden kocsmájában járt.

1.80. A nagynénikémnek kerekei vannak és nem ő a miskolci gyors.

1.81. Van olyan egér, amelyik nem szereti a sajtot.

1.82. Van olyan (ember), aki másnak vermet ás, és nem esik bele.

1.83. Van olyan ember, akinek az életében minden pillanat olyan, amikor csak olyat akar tenni, amit szabad.

1.87. Nem igaz, ha a csoport legalább két hallgatóból áll. Az állítás megfordítása: Ha volt olyan cukorka, amit minden hallgató szopogatott, akkor volt olyan hallgató, aki minden cukorkát szopogatott. Ez sem igaz.

1.88. P: Van olyan lány, aki táncolt fiúval.

Q: Van olyan fiú, aki táncolt lánnyal.

$P \Longleftrightarrow Q$.

1.89. P: Minden lány táncolt fiúval.

Q: Van olyan fiú, aki minden lánnyal táncolt.

$Q \Longrightarrow P$. A fordított állítás nem igaz, ha legalább két fiú vett részt a táncmulatságon, ezért P és Q nem ekvivalens.

1.90. P: Minden lány minden fiúval táncolt.

Q: Minden fiú minden lánnyal táncolt.

$P \Longleftrightarrow Q$.

1.91. 4 páros és 12 osztható 6-tal.

Az állítás igaz.

1.92. Minden páros szám osztható 6-tal.

Az állítás hamis.

1.93. Létezik olyan szám, amelyik páros és nem osztható 6-tal.

Az állítás igaz.

1.94. Minden 6-tal osztható szám páros.

Az állítás igaz.

1.95. Az f függvény határértéke az x_0 pontban L, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Tagadása: $(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$.

1.96. Az f függvény folytonos az x_0 pontban, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tagadása: $(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$.

1.97. Az f függvény folytonos az x_0 pontban, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tagadása: $(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$.

1.98. Az f függvény határértéke a végtelenben L, azaz $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$.

Tagadása: $(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall M \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(x > M \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$.

1.99. Az f függvény határértéke az x_0 pontban végtelen, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Tagadása: $(\exists B > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(0 < |x - x_0| < \delta \wedge f(x) \leq B)$.

1.100. Az f függvény jobb oldali határértéke az x_0 pontban $-\infty$, azaz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Tagadása: $(\exists B < 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(x_0 < x < x_0 + \delta \wedge f(x) \geq B)$.

1.101. (a) A megoldások halmaza $\{y \in \mathbb{R} : y < -5 \vee y > 5\}$.

(b) $\{Y \in \mathbb{R} : Y \geq 5\}$.

Nem azonos a két megoldáshalmaz. (a)-nak megoldása, (b)-nek nem megoldása $y = -7$.

2. Halmazok, valós számok

2.1. Igaz az állítás.

$$x \in (A \setminus B) \iff (x \in A) \wedge (x \notin B) \iff (x \in A) \wedge (x \in \overline{B}) \iff x \in (A \cap \overline{B})$$

2.2. Nem igaz, legyen például $A = B = \{1\}$. Ekkor $(A \cup B) \setminus A = \emptyset \neq B$.

Az előző feladat és a halmazműveletek disztributív tulajdonsága miatt

$$(A \cup B) \setminus A = (A \cup B) \cap \overline{A} = (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) = \emptyset \cup (B \cap \overline{A}) = B \setminus A.$$

Ezért $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A \subset B$.

Ha viszont $A \cap B \neq \emptyset$, például $A = [0, 2],\ B = [1, 3]$, akkor $B \setminus A \not\supset B$.

Megjegyzés: Mivel

$$x \in (A \cup B) \setminus A \iff x \in A \cup B \text{ és } x \notin A \iff x \in B \text{ és } x \notin A \iff x \in B \setminus A$$

alapján $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$, ezért $(A \cup B) \setminus A \subset B$.

2.5. Mivel $A \setminus B \subset A$, ezért $(A \setminus B) \cup A = A$. Ebbíl következik $(A \setminus B) \cup A \subset A \cup B$. A fordított tartalmazás nem igaz, például $A = \emptyset$, $B = \{1\}$ esetén $(A \setminus B) \cup A = \emptyset$, $A \cup B = \{1\}$.

2.10. Nem igaz. Legyen például $A = \{(0, 0)\}$, azaz az origó, B az $y = x$ egyenes, C pedig a sík összes egyenese.

2.19. $A \setminus (B \cup C)$.

2.20. $A \cap B \cap C$.

2.21.

$$[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] \cup [(C \cap A) \setminus B] =$$
$$= [(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)] \setminus (A \cap B \cap C).$$

2.22.

$$[A \setminus (B \cup C)] \cup [B \setminus (A \cup C)] \cup [C \setminus (A \cup B)] =$$
$$= (A \cup B \cup C) \setminus [(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)].$$

2.23.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, \quad A \cap B = \{1\}, \quad A \setminus B = \{3,5\},$$
$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4),(5,1),(5,2),(5,4)\},$$
$$P(A) = \{\emptyset,\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}\}.$$

2.24. Mindkét irányú tartalmazási kapcsolat fennáll a két halmaz között, mert egyenlők. Ugyanis mindkét halmaz rendezett párokból áll és

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \cup B) \times C &\iff x \in A \cup B \text{ és } y \in C \\ &\iff (x \in A \text{ vagy } x \in B) \text{ és } y \in C \\ &\iff (x \in A \text{ és } y \in C) \text{ vagy } (x \in B \text{ és } y \in C) \\ &\iff (x,y) \in A \times C \text{ vagy } (x,y) \in B \times C \\ &\iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C).\end{aligned}$$

2.25. $A \times B = \{(1,0),(3,0)\}$, $B \times A = \{(0,1),(0,3)\}$.

2.26. $P(A) = \{\emptyset,\{1\},\{\{1\}\},\{1,\{1\}\}\}$.

2.27. $\{\emptyset\}$ nem eleme A-nak, mert A elemei 1, $\{1,2\}$ és $\{1,2,3\}$.

$\{\emptyset\}$ nem is részhalmaza A-nak, hiszen $\emptyset$ nem eleme A-nak.

2.28. $\{1,2\}$ eleme A-nak, de nem részhalmaza.

2.29. $\{\{1,2\}\}$ nem eleme A-nak, de részhalmaza.

2.30. $\{1,\{1,2,3\}\}$ nem eleme A-nak, de részhalmaza.

2.37. Legyen tehát $a < b$ két valós szám. Tudjuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális, valamint azt is, hogy $a+\sqrt{2}$ és $b+\sqrt{2}$ között van racionális szám, legyen ez r. Ekkor $a < r-\sqrt{2} < b$ és $r-\sqrt{2}$ irracionális, mivel egy racionális és egy irracionális szám összege és különbsége irracionális.

2.38. Az arkhimédészi axióma: Minden x valós számhoz van olyan n pozitív egész, melyre $n > x$.

A tagadása: Van olyan x valós szám, melyre minden n pozitív egész esetén $n \leq x$.

A Cantor axióma: Egymásba skatulyázott korlátos zárt intervallumok sorozatának van közös eleme.

A tagadása: Egymásba skatulyázott korlátos zárt intervallumoknak van olyan sorozata, melynek nincs közös eleme.

2.40. Nem teljesül, legyen például $I_n = [1 - 1/n, 1)$.

2.42. Tudjuk, hogy minden x valós számra $|x| = \max\{x, -x\}$. Adjuk össze az $a \leq |a|$ és $b \leq |b|$ egyenlőtlenségeket, akkor

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

Hasonlóan a $-a \leq |a|$ és a $-b \leq |b|$ egyenlőtlenségeket összeadva

$$-(a + b) \leq |a| + |b|.$$

E két egyenlőtlenségből következik

$$|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\} \leq |a| + |b|.$$

Más megoldás:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \iff (a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$
$$\iff a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \iff 2ab \leq 2|a||b|.$$

2.43. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $a - b$ és a b számra!

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|,$$

melyből következik

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Most az $a - b$ és b számok helyett $b - a$, a-ra írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget, majd átrendezzük:

$$-(|a| - |b|) = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Ezek eredménye

$$\big||a| - |b|\big| = \max\{|a| - |b|, -(|a| - |b|)\} \leq |a - b|.$$

Más megoldás:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \iff (|a| - |b|)^2 \leq (a - b)^2$$
$$\iff a^2 - 2|a||b| + b^2 \leq a^2 - 2ab + b^2 \iff -2|a||b| \leq -2ab.$$

2.44. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül $n = 1$ esetén, $n = 2$ esetén pedig a háromszög-egyenlőtlenség.

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy minden $a_1, \ldots, a_n$ valós számra

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Mutassuk meg, hogy minden $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ valós számra

$$|a_1 + \ldots + a_{n+1}| \leq |a_1| + \ldots + |a_{n+1}|.$$

Először két számra alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget, majd az indukciós feltevést az $a_1, \ldots, a_n$ számokra:

$$|(a_1 + \ldots + a_n) + a_{n+1}| \leq |a_1 + \ldots + a_n| + |a_{n+1}| \leq |a_1| + \ldots + |a_n| + |a_{n+1}|.$$

2.46. A halmaz alulról korlátos, hiszen minden negatív szám és 0 is alsó korlátja. Semelyik pozitív szám nem alsó korlát, mert az arkhimédészi axiómával ekvivalens az, hogy minden p pozitív számhoz van olyan n pozitív egész szám, melyre $\frac{1}{n} < p$. Ezért a halmaz legnagyobb alsó korlátja, vagyis infimuma 0. Semelyik n pozitív egész számra $\frac{1}{n}$ nem a legkisebb eleme a halmaznak, mert $\frac{1}{n+1}$ annál kisebb eleme a halmaznak.

Minden n pozitív egész szám esetén $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$, ezért a halmaz felülről korlátos, és a legnagyobb eleme 1. Ez a halmaz szuprémuma is.

2.47. A halmaz alulról korlátos, mert minden negatív szám és 0 is alsó korlátja. Ha valamely $p > 0$ is alsó korlát volna, akkor

$$0 < p \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n}, \; n \in \mathbb{N}^+$$

ellentmondásra vezetne, ugyanis ekkor

$$p \leq \frac{2}{n} \iff n \leq \frac{2}{p}$$

ellentmondana az arkhimédészi axiómának, amely szerint a $\frac{2}{p}$ számnál is van nagyobb pozitív egész szám. Tehát a legnagyobb alsó korlát (infimum) 0. A halmaznak nincs legkisebb eleme, mert minden $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ elemnél kisebb $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

Minden n pozitív egészre

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1^2} \leq 2,$$

ezért a halmaz felülről korlátos, a legnagyobb eleme 2. A halmaz szuprémuma is 2.

2.48. A halmaz nyilván korlátos, hiszen 0 alsó korlátja és 1 felső korlátja. Semelyik $x > 0$ nem alsó korlátja a halmaznak, mert a $(0, \min\{x, 1\})$ intervallumban van racionális szám, ami x-nél kisebb eleme a halmaznak. Ezért az infimum 0, legkisebb elem nincs.

Hasonlóan, semelyik $y < 1$ nem felső korlátja a halmaznak, mert a $(\max\{y, 0\}, 1)$ intervallumban van racionális szám, ami y-nál nagyobb eleme a halmaznak. Így a szuprémum 1, legnagyobb elem nincs.

2.49. A halmaz korlátos, hiszen 0 alsó korlátja és 1 felső korlátja. Egyik $x > 0$ sem alsó korlátja a halmaznak, mert van irracionális szám a $(0, \min\{x, 1\})$ intervallumban, amely x-nél kisebb eleme a halmaznak. Így az infimum 0, legkisebb elem nincs.

Semelyik $y < 1$ nem felső korlátja a halmaznak, mert a $(\max\{y, 0\}, 1)$ intervallumban van irracionális szám, mely y-nál nagyobb eleme a halmaznak. Ezért a szuprémum 1, legnagyobb elem nincs.

2.50. Minden n és k pozitív egészre $0 < \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \leq 1$, emiatt

$$0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \leq 2.$$

Tehát a halmaz korlátos, és a legnagyobb eleme $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$, ami egyben a halmaz szuprémuma is.

A halmaznak alsó korlátja 0 és minden negatív szám, de pozitív alsó korlátja nincs. Az utóbbit indirekt módon látjuk be. Tegyük fel, hogy $p > 0$ alsó korlát, akkor $p \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ teljesül $n = k$ esetén is, azaz

$$p \leq \frac{2}{n} \iff n \leq \frac{2}{p}.$$

Ez ellentmond az arkhimédészi axiómának, miszerint $\frac{2}{p}$-nél is van nagyobb pozitív egész. Tehát a halmaz legnagyobb alsó korlátja, vagyis infimuma 0. Legkisebb eleme nincs.

2.51. Mivel $\sqrt{n} \geq \sqrt{1} = 1$ minden n pozitív egészre, ezért a halmaz alulról korlátos és a legkisebb eleme 1. Ez a halmaz infimuma is.

A halmaz felülről nem korlátos. Ugyanis minden K számra

$$K \leq |K| < [|K|] + 1,$$

ezért $n = ([|K|] + 1)^2$ olyan pozitív egész szám, melyre $K < \sqrt{n}$. A halmaz szuprémuma végtelen.

Más megoldás arra, hogy a halmaz felülről nem korlátos:

Indirekt módon tegyük fel, hogy felülről korlátos és K felső korlátja, akkor

$$K \geq \sqrt{n} \implies K^2 \geq n$$

ellentmond az arkhimédészi axiómának, hiszen az axióma szerint K^2-nél is van nagyobb pozitív egész.

2.52. $\sqrt[1]{1} < \sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$, valamint $n \geq 4$ esetén

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \iff n^{n+1} > (n+1)^n \iff n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$, $n \in \mathbb{N}^+$ alapján teljesül. Ezért a halmaz legnagyobb eleme és egyben szuprémuma $\sqrt[3]{3}$. Legkisebb eleme és egyben infimuma 1. A halmaz $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, $n \in \mathbb{N}^+$ szerint korlátos.

2.53. A halmaz alulról nem korlátos. mert bármely K valós számhoz létezik annál kisebb negatív racionális szám. $K \geq 0$ esetén például ilyen a -1, $K < 0$ esetén pedig $[K] - 1$. Ezért a halmaznak nincs legkisebb eleme, az infimuma pedig $-\infty$.

A halmaz felülről korlátos, mert 0 és minden pozitív szám felső korlátja. Semelyik L negatív szám nem felső korlát, mert az $(L, 0)$ intervallumban is van racionális szám, ami L-nél nagyobb eleme a halmaznak. Tehát a halmaz legkisebb felső korlátja, vagyis szuprémuma 0, legnagyobb eleme nincs.

2.58. A H halmaznak nincs minimuma (minimális eleme).

2.59. H-nak nincs maximuma.

2.63. Egyik sem igaz, H_4-nek van minimuma, 0 és maximuma, 2.

2.65. Egyik sem igaz, H_6-nak van minimuma, -1 és maximuma, 1.

2.76. Nincs ilyen A, mivel minden nem üres A halmazra $\inf A \leq \sup A$.

2.80. A H halmaznak legalább két eleme van.

2.92. (a) $\Longrightarrow$ (b), mert a legkisebb elem alsó korlát lenne.

(b) $\not\Longrightarrow$ (a), mert például $H = (0, 1)$ alulról korlátos, de nincs legkisebb eleme.

(b) $\iff$ (c), mert az, hogy H-nak nincs legkisebb eleme, azt jelenti, hogy H minden eleménél van kisebb H-beli elem, vagyis $(\forall x \in H)\,(\exists y \in H)\; y < x$.

(a) $\Longrightarrow$ (c), mivel (a) $\Longrightarrow$ (b) és (b) $\iff$ (c).

(c) $\not\Longrightarrow$ (a), mivel (b) $\iff$ (c) és (b) $\not\Longrightarrow$ (a).

2.93. Minden $a \in A$ esetén $a \in B$ következtében $a \leq \sup B$, vagyis $\sup B$ felső korlátja A-nak. Mivel $\sup A$ a legkisebb felső korlátja A-nak, ezért $\sup A \leq \sup B$.

Fordított egyenlőtlenség nem áll fenn minden A és B esetén, például az $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ halmazokra $A \subset B$ és $\sup A = 1$, $\sup B = 2$.

2.94. Minden $a \in A$ esetén $a \in B$, ezért $a \geq \inf B$, ami azt jelenti, hogy $\inf B$ alsó korlátja A-nak. Mivel $\inf A$ a legnagyobb alsó korlátja A-nak, így $\inf B \leq \inf A$.

Fordított egyenlőtlenség nem teljesül minden A és B halmazra, például $A = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ esetén $A \subset B$ és $\inf A = 2$, $\inf B = 1$.

2.112.

$$A \setminus (B \cup C)$$

2.113.

$$((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$$

2.116.

(a) A H halmaznak nincs minimuma (minimális eleme).

(b) H-nak nincs maximuma.

(c) H-nak van maximuma.

(d) A H halmaznak van minimuma.

2.136. $\mathbb{R}^+$ alulról korlátos, mert minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $x > 0$, így 0 alsó korlát. Bármely y negatív szám is alsó korlát, hiszen minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $x > 0 > y$. Semelyik $p > 0$ szám nem alsó korlát, mert van annál kisebb elem $\mathbb{R}^+$-ban, például $\frac{p}{2}$. Ezért a legnagyobb alsó korlát 0, vagyis $\inf \mathbb{R}^+ = 0$.

$\mathbb{R}^+$ felülről nem korlátos, mert bármely K valós számhoz található nála nagyobb $\mathbb{R}^+$-beli elem, $K \leq 0$ esetén például az 1, $K > 0$ esetén például $K + K = 2K$. Tehát $\sup \mathbb{R}^+ = \infty$.

Az $\mathbb{R}^+$ halmaz semelyik x eleme nem lehet a legkisebb elem, hiszen van annál kisebb halmazbeli elem, például $\frac{x}{2}$. Hasonlóan semelyik y eleme nem lehet a legnagyobb elem, mert van annál nagyobb halmazbeli elem, például $2y$.

2.138. Minden $x \in (3, 2019]$ elemre $3 < x \leq 2019$, tehát a halmaz korlátos és legnagyobb eleme 2019. Ezért $\sup(3, 2019] = 2019$. Ennek az intervallumnak nincs legkisebb eleme, hiszen minden $x \in (3, 2019]$ esetén $\frac{x+3}{2}$ olyan eleme az intervallumnak, mely x-nél kisebb. Mivel 3 és az annál kisebb számok alsó korlátai az intervallumnak, viszont semelyik 3-nál nagyobb szám nem alsó korlát, ezért $\inf(3, 2019] = 3$.

2.140. Ha az n gyökkitevőt növeljük, $\sqrt[n]{2}$ csökken, ezért a halmaz legnagyobb eleme $\sqrt[1]{2} = 2$. Tehát a halmaz felülről korlátos, és a szuprémuma is 2.

Minden n pozitív egészre $1 < \sqrt[n]{2}$, így 1 és minden 1-nél kisebb szám alsó korlátja a halmaznak. Ezért a halmaz alulról korlátos. Indirekt módon látunk be, hogy 1-nél nagyobb alsó korlát nincs. Tegyük fel, hogy $K > 1$ alsó korlát. $\sqrt[n]{2}$-t a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséggel becsüljük felülről tetszőleges n pozitív egészre, így

$$1 < K \leq \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq 1 + \frac{1}{n} \implies \frac{1}{K-1} \geq n.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség ellentmond az arkhimédészi axiómának, amely szerint $\frac{1}{K-1}$-nél is van nagyobb pozitív egész. Tehát a halmaz legnagyobb alsó korlátja, vagyis infimuma 1. Legkisebb eleme nincs.

2.141.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

szerint $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ csökken, amint n növekszik, ezért a halmaz legnagyobb eleme $\sqrt{2} - 1$, ez a szuprémuma is. Így a halmaz felülről korlátos.

$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ miatt 0 alsó korlátja a halmaznak, és minden negatív szám is alsó korlát. Ezért a halmaz alulról korlátos. Indirekt módon megmutatjuk, hogy más alsó korlát nincs. Tegyük fel, hogy $p > 0$ alsó korlát, akkor minden n pozitív egészre

$$0 < p \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ebből

$$p < \frac{1}{\sqrt{n}} \iff n < \frac{1}{p^2},$$

és ez ellentmond az arkhimédészi axiómának, mely szerint $\frac{1}{p^2}$-nél is van nagyobb pozitív egész szám. Tehát a halmaz legnagyobb alsó korlátja, vagyis infimuma 0. A halmaz minden eleme pozitív, így nincs legkisebb eleme.

2.143. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{n + \frac{1}{n}}{2} \geq \sqrt{n \cdot \frac{1}{n}} = 1 \iff n + \frac{1}{n} \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ezért a halmaz alulról korlátos és a legkisebb eleme 2, hiszen $2 = 1 + \frac{1}{1}$. Ez a halmaz infimuma is.

A halmaz felülről nem korlátos, mert bármely K számra

$$K \leq |K| < [|K|] + 1 < [|K|] + 1 + \frac{1}{[|K|] + 1}$$

és $[|K|] + 1 \in \mathbb{N}^+$, tehát van K-nál nagyobb eleme a halmaznak.

Más megoldás arra, hogy a halmaz felülről nem korlátos:

Indirekt módon tegyük fel, hogy K felső korlát, akkor

$$K \geq n + \frac{1}{n} > n, \; n \in \mathbb{N}^+.$$

Viszont az arkhimédészi axióma szerint K-nál is van nagyobb pozitív egész, így ellentmondásra jutottunk. A halmaznak nincs legnagyobb eleme, szuprémuma pedig végtelen.

3. Bizonyítási módszerek, becslések

3.1. Igaz, direkt módon bizonyítunk. Legyenek $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ és $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ racionális számok, ahol p_1, p_2, q_1, q_2 egész számok és $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. Ekkor $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$ szintén racionális szám, mivel $p_1q_2 + p_2q_1$ és q_1q_2 egész számok, valamint $q_1q_2 \neq 0$.

3.2. Indirekt módon bizonyítunk. Legyen r egy racionális, i pedig egy irracionális szám, és tegyük fel, hogy $s = r + i$ racionális. De akkor az előző feladat szerint $i = s + (-r)$ racionális, ami ellentmondás.

3.3. Nem igaz, például $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$, ami racionális.

3.4. Nem igaz, például $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, ami irracionális. Ez utóbbit indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $\sqrt{8} = \frac{p}{q}$, ahol p és q relatív prím egész számok.

$$\sqrt{8} = \frac{p}{q} \implies 8q^2 = p^2 \implies 2 \mid p^2 \implies 2 \mid p,$$

mert a 2 prímszám. Legyen $p = 2p_1$, ahol p_1 egész, akkor

$$8q^2 = 4p_1^2 \implies 2q^2 = p_1^2 \implies 2 \mid p_1^2 \implies 2 \mid p_1.$$

Legyen $p_1 = 2p_2$, ahol p_2 egész, akkor hasonlóan

$$2q^2 = 4p_2^2 \implies q^2 = 2p_2^2 \implies 2 \mid q^2 \implies 2 \mid q.$$

Ez ellentmond annak, hogy p és q relatív prímek, tehát $\sqrt{8}$ irracionális.

3.7. Igaz. Direkt módon bizonyítunk. Legyenek $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ és $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ racionális számok, ahol p_1, p_2, q_1, q_2 egész számok és $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. Ekkor $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$ szintén racionális szám, mivel p_1p_2 és q_1q_2 egész számok, valamint $q_1q_2 \neq 0$.

3.8. Nem igaz, például $0 \cdot \sqrt{2} = 0$ racionális szám.

3.9. Igaz, indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az $r_1 = \frac{p_1}{q_1} \neq 0$ racionális szám és az x irracionális szám szorzata az $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ racionális szám, akkor az $r_1x = r_2$ összefüggésből következik, hogy $x = \frac{r_2}{r_1} = \frac{p_2q_1}{p_1q_2}$ racionális, ami ellentmondás.

3.10. Nem igaz, például $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ racionális.

3.11. Nem igaz, például $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ irracionális. Indirekt módon igazoljuk, hogy $\sqrt{6}$ irracionális. Tegyük fel, hogy $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, ahol p és q relatív prím egész számok.

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q} \implies 6q^2 = p^2 \implies 2 \mid p^2 \implies 2 \mid p,$$

hiszen a 2 prímszám. Legyen $p = 2p_1$, ahol p_1 egész, akkor

$$6q^2 = 4p_1^2 \implies 3q^2 = 2p_1^2 \implies 2 \mid 3q^2 \implies 2 \mid q^2 \implies 2 \mid q,$$

mivel a 2 és a 3 is prímszám. $2 \mid p$ és $2 \mid q$ ellentmond annak, hogy p és q relatív prímek, így $\sqrt{6}$ irracionális.

3.14. Legyen például $a = -3$ és $n = 5$. Ekkor

$$(1+a)^n = (-2)^5 = -32 < 1 + n \cdot a = 1 - 5 \cdot 3 = -14.$$

3.15. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1.$$

3.16. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel:

$$\frac{a^2+2}{2} = \frac{(a^2+1)+1}{2} > \sqrt{(a^2+1) \cdot 1}.$$

Egyenlőség nem teljesülhet, mert ha $a > 0$, akkor $a^2 + 1 \neq 1$.

3.17. Osszuk el a bal oldalt 2-vel, majd alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget két-két tagra:

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b}}{2} = \frac{\frac{a}{c} + \frac{c}{a}}{2} + \frac{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}{2} + \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 3.$$

3.18. Átalakítás után két-két számra alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\right]=$$

$$=a\,\frac{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}{2}+b\,\frac{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}}{2}+c\,\frac{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}{2}\geq a+b+c.$$

3.19. Használjuk fel a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség három tagra vonatkozó alakját:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=1.$$

3.20. Írjuk fel a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget két-két tagra:

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2},\quad\sqrt{bc}\leq\frac{b+c}{2},\quad\sqrt{ca}\leq\frac{c+a}{2}.$$

Ezekből következik

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}=abc.$$

3.22. Először átalakítjuk a bal oldalt, majd két-két számra alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$ab+bc+ca=\left(\frac{ab}{2}+\frac{ca}{2}\right)+\left(\frac{bc}{2}+\frac{ab}{2}\right)+\left(\frac{ca}{2}+\frac{bc}{2}\right)=$$

$$=a\,\frac{b+c}{2}+b\,\frac{c+a}{2}+c\,\frac{a+b}{2}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

3.23. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget két-két tagra:

$$\frac{(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)}{16}=\frac{a+1}{2}\cdot\frac{b+1}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\geq$$

$$\geq\sqrt{a\cdot 1}\,\sqrt{b\cdot 1}\,\sqrt{ac}\,\sqrt{bc}=abc.$$

3.24. Legyen

$$x=a+b-c,\quad y=b+c-a,\quad z=c+a-b.$$

Ekkor $x+y=2b>0$, $y+z=2c>0$, $z+x=2a>0$, a bizonyítandó egyenlőtlenség pedig

$$\frac{x+z}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\geq xyz.$$

Ha $x,y,z\geq 0$, akkor a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget háromszor alkalmazzuk, így

$$\frac{x+z}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\geq\sqrt{xz}\sqrt{xy}\sqrt{yz}=xyz,$$

ami éppen a kérdéses egyenlőtlenség.

Ha x,y,z közül pontosan egy negatív, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala pozitív, míg a jobb oldala nem, ezért teljesül az egyenlőtlenség.

Végül x,y,z közül legalább kettő nem lehet negatív, mert $x+y=2b>0$, $y+z=2c>0$, $z+x=2a>0$.

3.25. Lehet, legyen például $a_i=\frac{1}{n}$, $i=1,\ldots,n$. Ekkor $n>100$ esetén

$$a_1^2+\ldots+a_n^2=n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}.$$

3.26. Nem lehet, mivel

$$a_1^2+\ldots+a_n^2\leq(a_1+\ldots+a_n)^2=1.$$

3.27. Lehet, például $a_1=11$, $a_2=-10$ esetén $a_1+a_2=1$ és $a_1^2+a_2^2=221$.

3.28. $0<a<1$ esetén $a<\sqrt{a}<1$, így ha $a=0{,}999\ldots9$ a tizedesvessző után 2019 db 9-es tizedesjeggyel, akkor $\sqrt{a}$ első 2019 tizedesjegye is 9-es.

3.29. Az összeg minden tagja legalább 1, ezért $n\geq 1000$ esetén teljesül az egyenlőtlenség, így $N=1001$ megfelelő.

3.30. Mindegyik tagot a legkisebbel alulról becsülve

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

ezért $N=1000^2+1$ megfelelő.

3.31. Ekvivalens átalakítással rendezzük át az egyenlőtlenséget úgy, hogy mindkét oldalán minden tag pozitív legyen:

$$0{,}001n^5+300n^3>5000n^4+2016n^2+15.$$

A bal oldalt becsüljük alulról, a jobb oldalt pedig felülről triviális módon:

$$0{,}001n^5 + 300n^3 \geq 0{,}001n^5, \qquad (5000 + 2016 + 15)n^4 \geq 5000n^4 + 2016n^2 + 15.$$

Amikor

$$\begin{aligned} 0{,}001n^5 &> (5000 + 2016 + 15)n^4 \\ 0{,}001n &> 7031 \\ n &> 7031000, \end{aligned}$$

akkor az eredeti egyenlőtlenség bal oldala nagyobb a jobb oldalánál. Így $N = 7031001$ megfelelő szám.

3.32. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy mindkét oldalon pozitív tagok álljanak:

$$\frac{1}{100}n^6 + 200n^4 + 51n > 2999n^5 + 1000n^3 + 111n^2.$$

A bal oldalt becsüljük alulról a legnagyobb kitevőjű taggal:

$$\frac{1}{100}n^6 + 200n^4 + 51n > \frac{1}{100}n^6,$$

a jobb oldalt pedig a becsüljük felülről a következőképpen:

$$2999n^5 + 1000n^3 + 111n^2 \leq 2999n^5 + 1000n^5 + 111n^5 = 4110n^5.$$

Ha $\frac{1}{100}n^6 > 4110n^5$, azaz $n > 411000$, akkor a feladatbeli egyenlőtlenség teljesül. Így $N = 411001$ megfelelő.

3.33. $N = 1001$ alkalmas szám, mivel

$$\sqrt[n]{2} < 1{,}001 \iff 2 < 1{,}001^n,$$

majd a Bernoulli-egyenlőtlenség szerint

$$1{,}001^n = (1 + 0{,}001)^n \geq 1 + n \cdot 0{,}001,$$

végül az alsó becslés 2-nél nagyobb, ha $n > 1000$.

3.34. $N = 9901$ megfelelő, mivel a Bernoulli-egyenlőtlenség következtében

$$1{,}01^n = (1 + 0{,}01)^n \geq 1 + n \cdot 0{,}01,$$

és a jobb oldal 100-nál nagyobb, ha $n > 9900$.

3.35.

$$0{,}9^n < \frac{1}{1000} \iff \left(\frac{10}{9}\right)^n > 1000,$$

és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$\left(\frac{10}{9}\right)^n = \left(1+\frac{1}{9}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{9} > 1000,$$

ha $n > 8991$. Ezért $N = 8992$ alkalmas szám.

3.36.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < 0{,}0001,$$

ha $n > 25000000$, ezért $N = 25000001$ megfelelő.

3.37. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget kétszer alkalmazzuk:

$$\sqrt[n]{1000} + \sqrt[n]{2019} = \sqrt[n]{1^{n-1} \cdot 1000} + \sqrt[n]{1^{n-1} \cdot 2019} \leq$$

$$\leq \frac{(n-1)\cdot 1 + 1000}{n} + \frac{(n-1)\cdot 1 + 2019}{n} = 2 + \frac{3017}{n}.$$

Ha $2 + \frac{3017}{n} < 3$, vagyis $n > 3017$, akkor teljesül a feladatbeli egyenlőtlenség. Tehát $N = 3018$ alkalmas szám.

Más megoldás:

Mutassuk meg, hogy elég nagy n számra

$$\sqrt[n]{1000} < \frac{3}{2} \text{ és } \frac{3}{2} < 3 - \sqrt[n]{2019}.$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2} > 2019,$$

ha $n > 4036$. Ekkor $\sqrt[n]{1000} < \sqrt[n]{2019} < \frac{3}{2}$, melyből következik

$$\sqrt[n]{1000} < \frac{3}{2} < 3 - \sqrt[n]{2019},$$

ha $n > 4036$. Tehát $N = 4037$ megfelelő.

3.39.

$$0{,}9999^n < 0{,}0001 \iff \left(\frac{1}{0{,}9999}\right)^n > \frac{1}{0{,}0001} = 10^4.$$

Mivel

$$\frac{1}{0{,}9999} = \frac{0{,}9999 + 0{,}0001}{0{,}9999} = 1 + \frac{0{,}0001}{0{,}9999} > 1 + 10^{-5},$$

ezért

$$\left(\frac{1}{0{,}9999}\right)^n > \left(1 + 10^{-5}\right)^n > 1 + n \cdot 10^{-5}$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt. Elég tehát egy olyan n-et keresni, amelyre

$$1 + n \cdot 10^{-5} \geq 10^4.$$

Ez például az $n = 10^9$ (és minden nagyobb n) esetén teljesül.

3.42. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden n pozitív egész számra

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{2}{n} = 3.$$

Ebből n-edik gyököt vonunk, majd átrendezzük az egyenlőtlenséget:

$$1 + \frac{2}{n} \geq \sqrt[n]{3} \implies \frac{2}{n} \geq \sqrt[n]{3} - 1.$$

Más megoldás:

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget n számra alkalmazzuk:

$$\sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{1^{n-1} \cdot 3} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + 3}{n} = 1 + \frac{2}{n}.$$

3.43. Írjuk fel a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget 2 darab $\sqrt{n}$-re és $n-2$ db 1-re:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1^{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n} + (n-2) \cdot 1}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Más megoldás:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \iff n \leq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

A jobb oldali hatványra a binomiális tételt alkalmazzuk, majd az $n+1$ pozitív tagú összeget $n \geq 2$ esetén triviálisan alulról becsüljük:

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^i =$$

$$= \binom{n}{0}1^n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^0\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq$$

$$\geq \binom{n}{0}1^n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^0 + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{4}{n} = 2n-1 \geq n.$$

Végül $n = 1$ esetén külön ellenőrizzük, hogy teljesül az egyenlőtlenség.

3.44. A Bernoulli-egyenlőtlenség alapján minden n pozitív egész számra

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^n \geq 1 + n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = n.$$

Utána n-edik gyököt vonunk, mellyel a kérdéses egyenlőtlenséghez jutunk.

Más megoldás:

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget n számra alkalmazzuk:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1^{n-1}\cdot n} \leq \frac{(n-1)\cdot 1 + n}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

3.45. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2.$$

3.47. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2},$$

amit n-edik hatványra emelve a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

3.48. Mindegyik tagot 1-gyel becsüljük alulról.

3.49. Mindegyik tagot $\frac{1}{\sqrt{n}}$-nel becsüljük alulról:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

3.51. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget 2 darab a és $n-1$ darab b számra!

3.52. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget 1 darab a^2 és $n-1$ darab b számra!

3.53. Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget $n+1$ számra, mégpedig az n darab b-re és az egy darab a-ra.

3.56. Bizonyítás teljes indukcióval. Az állítás $n = 1$-re igaz, hiszen $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$.

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, vagyis

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Az első n tag összegére az indukciós feltevést alkalmazzuk, majd közös nevezőre hozunk:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Más megoldás:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

3.57. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás igaz $n = 1$-re, hiszen $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, tehát

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Megmutatjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz, vagyis

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Az első n tag összegénél az indukciós feltevést használjuk fel, utána kiemelünk $(n+1)$-et:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

3.58. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1$-re igaz, mert $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, azaz

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Igazoljuk, hogy $(n+1)$-re is igaz az állítás, ami azt jelenti, hogy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Alkalmazzuk az indukciós feltevést az első n tag összegére, majd emeljünk ki $\frac{n+1}{6}$-t:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

3.59. Teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás $n = 1$-re igaz, mert $1^2 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, vagyis

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

3.60. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n = 1$-re igaz, hiszen $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Megmutatjuk, hogy az állítás igaz $(n+1)$-re is, vagyis

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Az első n tag összegénél felhasználjuk az indukciós feltevést, majd közös nevezőre hozunk:

$$[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)]+(n+1)(n+2)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=$$
$$=(n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Más megoldás:

$$k(k+1)=\frac{(k+2)-(k-1)}{3}k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}-\frac{(k-1)k(k+1)}{3}$$

felhasználásával a kérdéses összeget felírhatjuk teleszkopikus összegként:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=$$
$$=\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}-\frac{0\cdot 1\cdot 2}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}\right)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3.61. Teljes indukcióval látjuk be. Az állítás $n=1$-re igaz, mert $1\cdot 2\cdot 3=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}$.

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

és ezt felhasználva

$$[1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)]+(n+1)(n+2)(n+3)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}+(n+1)(n+2)(n+3)=$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4}(n+4)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}.$$

Más megoldás:

Használjuk fel az alábbi azonosságot:

$$k(k+1)(k+2)=\frac{(k+3)-(k-1)}{4}k(k+1)(k+2)=$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}-\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4},$$

ezt alkalmazva teleszkopikus összeggé írhatjuk a feladatbeli összeget:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=$$
$$=\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}-\frac{0\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}-\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}\right)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

3.62. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n=1$-re igaz, mert $1!=(1+1)!-1$.
Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, azaz

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

Belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$[1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!]+(n+1)(n+1)!=$$
$$=[(n+1)!-1]+(n+1)(n+1)!=(n+2)!-1.$$

3.63. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás igaz $n=1$-re, mert $\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2^1$.

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, vagyis $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$. Megmutatjuk, hogy az állítás igaz $(n+1)$-re is, ami azt jelenti, hogy $\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}=2^{n+1}$.

Az $i=0$ és az $i=n+1$ indexű tagot külön írjuk fel, az összeg többi tagjában pedig az

$$\binom{n+1}{i}=\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1},\ i=1,\ldots,n$$

azonosságot alkalmazzuk:

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}=\binom{n+1}{0}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}+\binom{n+1}{n+1}=$$
$$=1+\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right)+1=$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}+1\right]+\left[1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\right]=\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=$$
$$=\sum_{i-1=0}^{n}\binom{n}{i-1}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}==\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n+2^n=2^{n+1},$$

ahol az utolsó sorban kétszer is felhasználtuk az indukciós feltevést.

3.64. A bal oldalon egymást követő négyzetszámok közti egész számok összege áll, míg a jobb oldalon a négyzetszámokhoz tartozó köbszámok összege. Ezért a sejtésünk

$$[(n-1)^2+1]+[(n-1)^2+2]+\ldots+[(n-1)^2+2n-2]+n^2=(n-1)^3+n^3,\ \ n\in\mathbb{N}^+.$$

Ennek bizonyítása:

$$[(n-1)^2+1]+[(n-1)^2+2]+\ldots+[(n-1)^2+2n-2]+n^2=$$
$$=(2n-2)(n-1)^2+1+2+\ldots+(2n-2)+n^2=$$
$$=2(n-1)^3+\frac{(2n-2)(2n-1)}{2}+n^2=$$
$$=(n-1)^3+(n-1)^3+(n-1)(2n-1)+n^2=(n-1)^3+n^3.$$

3.65. A bal oldalon az első néhány páratlan pozitív egész szám összege áll, míg a jobb oldalon négyzetszámok. Ezért a sejtésünk

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2,\ n\in\mathbb{N}^+,$$

amit teljes indukcióval bizonyítunk.

Az állítás $n=1$-re igaz. Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz; belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$[1+3+5+\ldots+(2n-1)]+[2(n+1)-1]=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

3.66. A bal oldalon az első néhány pozitív egész szám köbének összege áll, míg a jobb oldalon ennek az első néhány pozitív egész szám összegének négyzete. Ezért azt sejtjük, hogy

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\ \ n\in\mathbb{N}^+.$$

Az állítást teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

3.67. Használjuk fel, hogy az első n pozitív egész szám négyzetösszege

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ekkor

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=2^2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=$$
$$=4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

3.68. Tudjuk, hogy az első k pozitív egész szám négyzetösszege

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

valamint az első k páros pozitív egész szám négyzetösszege

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (2k)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}.$$

Ezek alapján

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 =$$
$$= [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2] =$$
$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

3.69.

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 = 3^1 + 1 \\ a_2 &= 10 = 3^2 + 1 \\ a_3 &= 28 = 3^3 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $a_n = 3^n + 1$, $n \in \mathbb{N}^+$. Az állítás $n = 1$-re igaz. Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz; belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$a_{n+1} = 3a_n - 2 = 3(3^n + 1) - 2 = 3^{n+1} + 1.$$

Más megoldás:

Legyen $b_n = a_n - 1$, akkor $b_1 = 3$ és minden n indexre

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = 3a_n - 2 - 1 = 3(a_n - 1) = 3b_n,$$

így teljes indukcióval következik $b_n = 3^n$. Végül $a_n = b_n + 1 = 3^n + 1$.

3.70. Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n = 5$-re igaz, mert $\frac{10!}{(5!)^2} = 4 \cdot 63 < 4 \cdot 64 = 4^{5-1}$.

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, vagyis $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}$. Belátjuk, hogy az állítás $(n+1)$-re is igaz, azaz $\frac{(2(n+1))!}{[(n+1)!]^2} < 4^n$:

$$\frac{(2(n+1))!}{[(n+1)!]^2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} < 4^{n-1}\left(4 - \frac{2}{n+1}\right) < 4^n.$$

3.71. Az állítás $n = 4$-re igaz, hiszen $3^4 > 5 \cdot 4^2$. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a kérdéses egyenlőtlenség igaz minden $n \geq 4$ egész számra.

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, és belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 5n^2 > 5(n+1)^2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség:

$$15n^2 > 5(n+1)^2 \iff 10n^2 - 10n > 5 \iff 2n(n-1) > 1,$$

ami $n \geq 4$ esetén fennáll. Tehát bármely $n_0 \geq 3$ megfelelő.

3.72. Teljes indukcióval bizonyítunk, melynek azt a változatát alkalmazzuk, amikor az indukciós lépésben abból következtetünk a következő állítás igaz voltára, hogy az összes előző állítás igaz.

Az állítás $n = 1$-re és $n = 2$-re igaz, mert

$$a_1 = 1 = 3 \cdot 4^0 - 2 \cdot 3^0, \quad a_2 = 6 = 3 \cdot 4^1 - 2 \cdot 3^1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás n-ig igaz, és belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$a_{n+1} = 7a_n - 12a_{n-1} = 7(3 \cdot 4^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}) - 12(3 \cdot 4^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-2}) =$$
$$= (21 - 9) \cdot 4^{n-1} - (14 - 8) \cdot 3^{n-1} = 3 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n.$$

3.73. Teljes indukcióval igazoljuk, ezt abban a formájában használjuk, amikor az indukciós lépésben a következő állításra az összes előző állításból következtetünk.

Az állítás $n = 1$-re és $n = 2$-re igaz, mert

$$a_1 = 2 = (1+1)2^{1-1}, \quad a_2 = 6 = (2+1) \cdot 2^{2-1}.$$

Tegyük fel, hogy az állítás n-ig igaz. Belátjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} = 4(n+1)2^{n-1} - 4n2^{n-2} = (2n + 2 - n)2^n = (n+2)2^n.$$

3.74. A teljes indukciónak azzal a változatával igazoljuk, ahol az indukciós lépésben a következő állításra az összes előző állításból következtetünk.

Az állítás $n = 1$-re és $n = 2$-re igaz, mert

$$a_1 = 2 = 3^{1-1} + 1, \quad a_2 = 4 = 3^{2-1} + 1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás n-ig igaz, és megmutatjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} + 4 = 6(3^{n-1} + 1) - 9(3^{n-2} + 1) + 4 =$$
$$= 2 \cdot 3^n + 6 - 3^n - 9 + 4 = 3^n + 1.$$

3.75. Keressünk olyan nem nulla kvóciensű mértani sorozatot (q^n, $q \neq 0$), amelyik az $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ rekurziót kielégíti, azaz $q^{n+2} = 5q^{n+1} - 6q^n$. Ez utóbbit q^n-nel egyszerűsítve a $q^2 - 5q^1 + 6 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei 2 és 3, így (2^n) és (3^n) megoldása a rekurziónak. E két megoldás minden $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$ lineáris kombinációja is megoldás. Az $a_1 = 2$ és $a_2 = 8$ feltételek szerint

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = A \cdot 3^1 + B \cdot 2^1 = 2 \\ a_2 = A \cdot 3^2 + B \cdot 2^2 = 8 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} A = \dfrac{4}{3} \\ B = -1 \end{array}\right\}.$$

Tehát $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2^n$, $n \in \mathbb{N}^+$.

(Ha a feladat nem a sorozat explicit alakjának megtalálása, hanem csak annak bizonyítása volna, azt teljes indukcióval is megtehetnénk.)

3.76. Keressünk olyan nem nulla kvóciensű q^n mértani sorozatot, amelyik teljesíti az $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ rekurziót, vagyis $q^{n+2} = 5q^{n+1} - 6q^n$. Az egyenlet q^n-nel egyszerűsítve $q^2 - 5q + 6 = 0$, melynek gyökei 2 és 3, ezért (2^n) és (3^n) megoldása a rekurziónak. E megoldások minden $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$ lineáris kombinációja is megoldás. Az $a_1 = 29$ és $a_2 = 85$ feltételek szerint

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = A \cdot 3^1 + B \cdot 2^1 = 29 \\ a_2 = A \cdot 3^2 + B \cdot 2^2 = 85 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} A = 9 \\ B = 1 \end{array}\right\}.$$

Ezért $a_n = 9 \cdot 3^n + 1 \cdot 2^n = 3^{n+2} + 2^n$, $n \in \mathbb{N}^+$.

(Az eredmény ismeretében azt teljes indukcióval is bizonyíthatjuk.)

3.77. A teljes indukció állítása szerint minden n pozitív egész esetén igaz az A_n állítás.

3.78. Minden $n \geq 100$ esetén igaz az A_n állítás.

3.79. Az A_1 állítás igaz. A többi állításról nem tudjuk eldönteni, hogy igaz-e, mert a feladat állítása igaz abban az esetben, amikor mindegyik A_n állítás igaz, és akkor is, amikor A_1 igaz, a többi A_n állítás hamis.

3.87. Az A_1 állítás hamis. A többi állításról nem tudjuk eldönteni, hogy igaz-e, mert a feladat állítása igaz abban az esetben, amikor A_1 kivételével mindegyik A_n állítás igaz, és akkor is, amikor minden A_n állítás hamis.

3.88. Mindegyik A_n igaz. Ez a forma a teljes indukció „descente infinie” (végtelen leszállás) verziója.

3.90. k szerinti teljes indukcióval következik, hogy minden k nemnegatív egész esetén A_{2^k} igaz, vagyis $A_1, A_2, A_4, \ldots, A_{2^k}, \ldots$ igaz. A többi állításról nem tudjuk eldönteni, hogy igaz-e, mert a feladat állítása igaz abban az esetben, amikor mindegyik A_n állítás igaz, és akkor is, amikor minden k nemnegatív egészre A_{2^k} igaz, a többi A_n állítás hamis.

3.91. Minden n esetén igaz az A_n állítás, amit beláthatunk úgy, hogy teljes indukciót alkalmazunk az ($A_1, \ldots, A_n$ igaz), $n \in \mathbb{N}^+$ állításokra.

3.96. Semmire nem tudunk következtetni. A feladatbeli állítás igaz akkor is, ha minden A_n állítás igaz, és akkor is, amikor minden A_n állítás hamis (az utóbbi esetben a vagy művelettel összekapcsolt két állítás közül a második igaz).

3.97. Minden $n \neq 2$ esetén igaz az A_n állítás, azaz $A_1, A_3, A_4, A_5, \ldots$ igaz. A_2 lehet igaz és lehet hamis is.

Az és művelettel összekapcsolt mindkét állítás igaz, vagyis A_1 igaz és

$$(\forall n \in \mathbb{N}^+)\left((A_n \vee A_{n+1}) \Longrightarrow A_{n+2}\right)$$

igaz. Az utóbbi $n = 1$-re $(A_1 \vee A_2) \Longrightarrow A_3$, ezért A_3 igaz. Teljes indukcióval következik, hogy A_n igaz minden $n \geq 3$ esetén, hiszen az indukciós lépés

$$A_n \text{ igaz} \Longrightarrow A_{n-1} \vee A_n \text{ igaz} \Longrightarrow A_{n+1} \text{ igaz.}$$

A feladatbeli állítás igaz akkor is, ha minden A_n állítás igaz, és igaz akkor is, ha $A_1, A_3, A_4, \ldots$ igaz és A_2 hamis.

3.115. Használjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget, miszerint

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

Köbre emelve $abc \leq 6^3 = 216$. A jobb oldalon szereplő szám a keresett maximum, hiszen $a = b = c = 6$ esetén egyenlőség teljesül.

3.116. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget három darab $\frac{a}{3}$, két darab $\frac{b}{2}$ és egy darab c számra:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{a}{3}\right)^3\left(\frac{b}{2}\right)^2 c} \leq \frac{\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c}{6} = \frac{a+b+c}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

Hatodik hatványra emelve és $3^3 \cdot 2^2$-nel szorozva $a^3b^2c \leq 4 \cdot 3^9$. A jobb oldalon álló szám a keresett maximum, hiszen $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = c = 3$, azaz $a = 9$, $b = 6$, $c = 3$ esetén egyenlőség áll fenn.

3.117. Az a^2bc egy négytényezős szorzat. Írjuk fel a megadott 3 tagú összeget 4 tagú összegként, és használjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget 4 szám esetén:

$$\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b+c}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot b\cdot c} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}a^2bc}.$$

Eszerint

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{4}a^2bc}.$$

Negyedik hatványra emelés és átrendezés után:

$$a^2bc \leq 4\left(\frac{9}{2}\right)^4.$$

A jobb oldalon szereplő szám a keresett maximum, hiszen $\frac{a}{2} = b = c = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ esetén egyenlőség van.

3.118. Használjuk a harmonikus és a számtani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{abc}{ab+bc+ac} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{a+b+c}{3} = \frac{18}{9} = 2.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c = 6$.

3.119. Írjuk fel a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget e három pozitív számra, akkor

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{18}.$$

Ebből következik

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{18}.$$

A jobb oldalon álló szám a keresett minimum, hiszen $a = b = c = \sqrt[3]{18}$ esetén egyenlőség érvényes.

3.120. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget a $3a$, $2b$, c pozitív számokra:

$$\frac{3a+2b+c}{3} \geq \sqrt[3]{3a\cdot 2b\cdot c} = \sqrt[3]{6\cdot 18} = 3\sqrt[3]{4}.$$

Ezért

$$3a+2b+c \geq 9\sqrt[3]{4},$$

ahol a jobb oldalon álló $9\sqrt[3]{4}$ a keresett minimum, hiszen $3a = 2b = c = 9\sqrt[3]{4}$, azaz $a = 3\sqrt[3]{4}$, $b = \frac{9\sqrt[3]{4}}{2}$, $c = 9\sqrt[3]{4}$ esetén egyenlőség teljesül.

3.121. Írjuk fel a $2a+b+c$ kifejezést egy három tagú számtani közép segítségével:

$$2a+b+c = 3\cdot\frac{2a+b+c}{3} \geq 3\sqrt[3]{(2a)bc} = 3\sqrt[3]{2\cdot 18} = 3\sqrt[3]{36}$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $2a=b=c=\sqrt[3]{36}$.

3.122. Felhasználjuk a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$a^2+b^2+c^2 = 3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2 \geq 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 = 3\left(\sqrt[3]{18}\right)^2.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a=b=c=\sqrt[3]{18}$.

3.123.

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \iff 0 \leq n(a_1^2+\ldots+a_n^2)-(a_1+\ldots+a_n)^2.$$

A jobb oldalon minden a_i négyzete $(n-1)$-szer szerepel, valamint minden $i<j$ esetén $-2a_ia_j$, ami éppen az összes $i<j$ indexre $(a_i-a_j)^2$ összege:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_ia_j = \sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2.$$

A négyzetösszeg nemnegatív, ez bizonyítja a feladatbeli egyenlőtlenséget.

3.124. Minden $i,j=1,\ldots,n$ indexre

$$(a_ib_j-a_jb_i)^2 = a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2-2a_ia_jb_ib_j,$$

majd ezeket összeadjuk minden $1\leq i<j\leq n$ indexre, utána a kapott összeget átalakítjuk:

$$0 \leq \sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2-2a_ia_jb_ib_j) =$$
$$= (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2.$$

Ezt átrendezzük, majd négyzetgyököt vonunk, így a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Más megoldás:

Tekintsük a

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2 = (a_1^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

másodfokú polinomot! Mivel a polinom nemnegatív, azért a diszkriminánsa

$$D = 4(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+\cdots+b_n^2) \leq 0.$$

Ebből kis átalakítással a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

4. Sorozatok határértéke

4.1. A sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert

$$1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{n}>\frac{1}{n+1} \iff n<n+1.$$

4.2. Legyen $a_n=\dfrac{2^n}{n!}$. A sorozat monoton csökkenő, és $n\geq 2$ esetén szigorúan monoton csökkenő, mert $a_1=a_2=2$, valamint

$$\frac{2^n}{n!}>\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \iff 1>\frac{2}{n+1} \iff n>1.$$

4.3. Legyen $a_n=\dfrac{n^3}{2^n}$. A sorozat első négy tagja monoton növekszik: $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_2=2$, $a_3=\dfrac{27}{8}$, $a_4=4$. Az negyedik tagtól kezdve a sorozat szigorúan monoton csökken, mert $a_5=\dfrac{125}{32}$, és $n\geq 5$ esetén

$$\frac{n^3}{2^n}>\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^3=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3>\frac{1}{2}.$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3>1-3\cdot\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}\geq\frac{3}{n+1} \iff n\geq 5.$$

4.4. A sorozat váltakozó előjelű, ezért nem monoton semelyik indextől kezdve sem.

4.5. Legyen $a_n=\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}n\right)$. Mivel

$$a_{24k}=\sin(10k\pi)=0,\quad a_{24k+6}=\sin\left((10k+2)\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

ezért a sorozat nem monoton semelyik indextől kezdve sem.

4.6. Legyen $a_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$. Mivel

$$a_{8k}=\sin(2k\pi)=0,\quad a_{8k+2}=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

ezért a sorozat nem monoton semelyik indextől kezdve sem.

4.7. Legyen $a_n = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$. A tangensfüggvény szigorúan monoton növekszik a $(0,1]$ intervallumon, továbbá az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat szigorúan monoton csökken és tagjai $(0,1]$-be esnek, így (a_n) szigorúan monoton csökken.

4.8.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

szerint a sorozat szigorúan monoton csökken, mert a jobb oldal nevezője pozitív tagú és szigorúan monoton növekszik.

4.9. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk n darab $1+\frac{1}{n}$ és egyetlen 1 számra:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1},$$

majd $(n+1)$-edik hatványra emeljük a kapott egyenlőtlenséget. Az eredmény

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő.

4.10. Írjuk fel a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget n darab $1+\frac{1}{2n}$ és egyetlen 1 számra:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{2n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+\frac{3}{2}}{n+1} = 1+\frac{1}{2(n+1)}.$$

Emeljük $(n+1)$-edik hatványra a kapott egyenlőtlenséget, az eredmény

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}.$$

Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Más megoldás:

Az $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, hiszen az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat páros indexű tagjainak sorozata, így

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

is szigorúan monoton növekvő.

4.11. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk n darab $1+\frac{3}{n}$ és egyetlen 1 számra:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+4}{n+1} = 1+\frac{3}{n+1}.$$

Ha $(n+1)$-edik hatványra emeljük a kapott egyenlőtlenséget, az

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^n < \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}$$

eredményre jutunk. Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő.

4.12. A sorozat korlátos, hiszen minden n pozitív egészre

$$1 \le \frac{n+2}{n} \le \frac{n+2n}{n} = 3.$$

4.13. A sorozat alulról korlátos, mert minden n pozitív egészre

$$n^2 - n = n(n-1) \ge 0.$$

Felülről nem korlátos, amit indirekt módon látunk be. Tegyük fel, hogy a sorozat felülről korlátos és K felső korlátja, akkor $K \ge 0$ és minden n pozitív egészre

$$K \ge n(n-1) \ge (n-1)^2 \iff \sqrt{K}+1 \ge n,$$

ami ellentmond az arkhimédészi axiómának.

4.14. A sorozat korlátos, mert minden n pozitív egészre

$$\left|\left(-\frac{4}{7}\right)^n\right| = \left(\frac{4}{7}\right)^n \le 1 \implies -1 \le \left(-\frac{4}{7}\right)^n \le 1.$$

4.15. Legyen $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$. A sorozat felülről nem korlátos, ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy K felső korlát, akkor minden n pozitív egészre $K \ge a_n$. A Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$K \ge a_{2n} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2n} \ge 1+2n\cdot\frac{1}{2} \implies K-1 \ge n,$$

és ez ellentmond az arkhimédészi axiómának.

A sorozat alulról sem korlátos, melyet szintén indirekt módon bizonyítunk. Ha L alsó korlát, akkor bármely n pozitív egész számra $L \leq a_n$. Ez alkalommal is a Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazzuk tetszőleges n pozitív egészre:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \geq 1+(2n-1)\cdot\frac{1}{2} > n.$$

Ezekből következik

$$L \leq a_{2n-1} = -\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2n-1} < -n \implies L > n,$$

mely egyenlőtlenség ellentmondást ad az arkhimédészi axiómával.

4.16. A sorozat korlátos, mert

$$\left|\sin(4n^2-n)\right| \leq 1, \quad \left|\cos(4n^2+1)\right| \leq 1$$

következtében

$$-1 \leq \sin(4n^2-n)\cos(4n^2+1) \leq 1.$$

4.17. Legyen $a_n = \left(\frac{n-5}{n}\right)^n$. Ha $n \geq 5$, akkor

$$0 \leq \left(\frac{n-5}{n}\right)^n \leq 1,$$

ezért a sorozatnak $\max\{1, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ felső korlátja, $\min\{0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ alsó korlátja. Tehát a sorozat korlátos.

4.18. A sorozat alulról korlátos, hiszen minden tagja pozitív.

Felülről nem korlátos a sorozat. Indirekt módon tegyük fel, hogy felülről korlátos és K felső korlátja. A binomiális tételből következik, hogy minden n pozitív egészre

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \implies \binom{n}{2} < 2^n, \quad n \geq 2.$$

Ekkor $n \geq 2$ esetén

$$K \geq \frac{2^n}{n} > \frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2} \implies 2K+1 > n,$$

ami ellentmond az arkhimédészi axiómának, mely szerint $\max\{2K+1, 1\}$-nál is van nagyobb pozitív egész.

Más megoldás arra, hogy a sorozat felülről nem korlátos:

Először teljes indukcióval belátjuk, hogy minden n pozitív egészre $2^n \geq \frac{1}{2}n^2$. Ha $n = 1$, $n = 2$ vagy $n = 3$, akkor teljesül az egyenlőtlenség. Legyen most $n \geq 3$ és tegyük fel, hogy $2^n \geq \frac{1}{2}n^2$. Ekkor

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot \frac{1}{2}n^2 = n^2 \geq \frac{1}{2}(n+1)^2,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség az $n(n-2) \geq 1$ összefüggéssel egyenértékű, ami nyilvánvalóan igaz.

Ezután indirekt módon igazoljuk, hogy a sorozat felülről nem korlátos. Tegyük fel, hogy felülről korlátos és K felső korlátja, majd használjuk fel az imént bizonyított egyenlőtlenséget! Azt kapjuk, hogy minden n indexre

$$K \geq \frac{2^n}{n} \geq \frac{n}{2},$$

tehát $2K \geq n$, ami ellentmondást jelent az arkhimédészi axiómával.

4.19. A sorozat alulról korlátos, hiszen minden tagja pozitív.

Indirekt módon bizonyítjuk, hogy felülről nem korlátos. Tegyük fel, hogy a sorozat felülről korlátos és K felső korlátja. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint

$$(\sqrt[3]{4})^n = (1 + (\sqrt[3]{4} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[3]{4} - 1),$$

amit köbre emelünk és jobb oldalt triviálisan alulról becsüljük:

$$4^n \geq \left(1 + n(\sqrt[3]{4} - 1)\right)^3 > (\sqrt[3]{4} - 1)^3 n^3.$$

Ekkor

$$K \geq \frac{4^n}{n^2} > (\sqrt[3]{4} - 1)^3 n \implies \frac{1}{(\sqrt[3]{4} - 1)^3} K > n,$$

és ez ellentmond az arkhimédészi axiómának.

Más megoldás arra, hogy a sorozat felülről nem korlátos:

Először teljes indukcióval belátjuk, hogy minden n pozitív egészre $4^n \geq 2n^3$. Ha $n = 1$ vagy $n = 2$, akkor teljesül az egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ olyan pozitív egész, melyre $4^n \geq 2n^3$. Ekkor

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geq 4 \cdot 2n^3 = 8n^3 \geq 2(n+1)^3,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség indoklása

$$8n^3 \geq 2(n+1)^3 \iff 3n^3 - 3n^2 - 3n \geq 1 \iff 3n\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right) \geq 1.$$

Ezután indirekt módon igazoljuk, hogy a sorozat felülről nem korlátos. Tegyük fel, hogy felülről korlátos és K felső korlátja, majd használjuk fel a bizonyított egyenlőtlenséget! Ezekből minden n indexre következik

$$K \geq \frac{4^n}{n^2} \geq 2n,$$

ami ellentmondásra vezet az arkhimédészi axiómával.

4.20. Minden n pozitív egész esetén $\operatorname{tg}(n\pi) = 0$, ezért a sorozat a nulla konstanssorozat, ami korlátos.

4.21.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

alapján minden n pozitív egészre

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \leq \sqrt{2},$$

ezért a sorozat korlátos.

4.22. Legyen $a_n = (-1)^n \ln n$. A sorozat felülről nem korlátos. Indirekt módon tegyük fel, hogy felülről korlátos és K felső korlátja, akkor minden n pozitív egészre

$$K \geq a_{2n} = \ln(2n) \implies \frac{1}{2}e^K \geq n,$$

ami ellentmond az arkhimédészi axiómának.

A sorozat alulról sem korlátos, amit ismét indirekt módon látunk be. Tegyük fel, hogy alulról korlátos és L alsó korlátja, akkor minden n pozitív egészre

$$L \leq a_{2n-1} = -\ln(2n-1) \implies \frac{1}{2}(e^{-L} + 1) \geq n.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség ellentmond az arkhimédészi axiómának.

4.23. A sorozat szigorúan monoton növekvő, hiszen minden n indexre

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} > a_n.$$

A sorozat minden tagja pozitív, így (a_n) alulról korlátos. Felülről is korlátos a sorozat, mert minden n indexre

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

4.24. $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^+\ a_n \leq K.$

4.25. $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}^+\ a_n > K.$

4.26. $\forall n \in \mathbb{N}^+\ a_n \leq a_{n+1}.$

4.27. $\exists n \in \mathbb{N}^+\ a_n > a_{n+1}.$

4.28. Az (a_n) sorozat monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^+\ a_n \leq a_{n+1}) \vee (\forall n \in \mathbb{N}^+\ a_n \geq a_{n+1}).$$

4.29.

$$(\exists n \in \mathbb{N}^+\ a_n > a_{n+1}) \wedge (\exists n \in \mathbb{N}^+\ a_n < a_{n+1}).$$

4.32.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists N \in \mathbb{N}^+\ \forall n \in \mathbb{N}^+\ (n \geq N \Longrightarrow |a_n - \pi| < \varepsilon).$$

4.33.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \forall N \in \mathbb{N}^+\ \exists n \in \mathbb{N}^+\ (n \geq N \wedge |a_n - \pi| \geq \varepsilon).$$

4.34.

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists N \in \mathbb{N}^+\ \forall n \in \mathbb{N}^+\ (n \geq N \Longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon).$$

4.35.

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \forall N \in \mathbb{N}^+\ \exists n \in \mathbb{N}^+\ (n \geq N \wedge |a_n - A| \geq \varepsilon).$$

4.36.

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}^+\ \forall n \in \mathbb{N}^+\ (n \geq N \Longrightarrow K < a_n).$$

4.37.

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall N \in \mathbb{N}^+\ \exists n \in \mathbb{N}^+\ (n \geq N \wedge K \geq a_n).$$

4.43. $\dfrac{1}{2n} \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\frac{1}{2n} - 0\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon},$$

ezért a konvergencia definíciójában $N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ megfelel küszöbindexnek (és minden N-nél nagyobb pozitív egész is).

4.44. $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon},$$

így a konvergencia definíciójában ε-hoz tartozó küszöbindexnek megfelel $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (és minden N-nél nagyobb pozitív egész is).

4.45. $\dfrac{n-1}{n} \to 1$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon},$$

tehát a konvergencia definíciójában ε-hoz alkalmas küszöbindexnek $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (és minden N-nél nagyobb pozitív egész is).

4.46. $1 + \dfrac{1}{n^2} \to 1$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

ezért a konvergencia definíciójában $N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$ alkalmas küszöbindexnek. Ekkor minden $n \geq N$ index esetén

$$n \geq \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

amiből következik

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 1\right| < \varepsilon.$$

Az $\varepsilon = 10^{-4}$ hibakorláthoz megfelelő $N = 101$.

4.47. $\dfrac{2}{3n-1} \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\frac{2}{3n-1} - 0\right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right),$$

így a konvergencia definíciójában $N = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right)\right] + 1$ megfelelő. Minden $n \geq N$ index esetén

$$n \geq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right)\right] + 1 > \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right),$$

melyből következik

$$\left|\frac{2}{3n-1} - 0\right| < \varepsilon.$$

Az $\varepsilon = 10^{-4}$ hibakorlátoz jó $N = 6668$.

4.48. $\dfrac{4n+3}{2n+1} \to 2$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\frac{4n+3}{2n+1} - 2\right| = \frac{1}{2n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right),$$

mely szerint a konvergencia definíciójában $N = \max\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1, 1\right\}$ megfelelő szám. Az $\varepsilon = 10^{-4}$ hibakorlátoz választhatjuk a $N = 5000$ számot.

Megjegyzés: $N = \max\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1, 1\right\}$-ben a második elem biztosítja, hogy N legalább 1 legyen, ugyanis $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1$ lehet nulla.

4.49. $\dfrac{1}{n}\sin n \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| \leq \frac{1}{n},$$

ezért ha $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, akkor teljesül $\left|\dfrac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$. Így a konvergencia definíciójában $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ megfelelő. $\varepsilon = 10^{-4}$-hez választhatjuk a $N = 10^4 + 1$ számot.

4.50. $(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2},$$

ezért a konvergencia definíciójában $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ választható küszöbindexnek. $\varepsilon = 10^{-4}$-hez megfelelő $N = 10^8 + 1$.

4.51. $\frac{n}{n^2+1} \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden n indexre

$$\left|\frac{n}{n^2+1} - 0\right| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ezért a konvergencia definíciójában választhatjuk a $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ számot küszöbindexnek. Az $\varepsilon = 10^{-2}$ hibakorláthoz megfelelő $N = 101$.

4.52. $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$. Legyen először $0 < \varepsilon \leq 1$. Minden n indexre

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon, \text{ ha } n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1},$$

tehát a konvergencia definíciójában $N = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\right] + 1$ alkalmas küszöbindexnek. Legyen most $\varepsilon > 1$. Ekkor minden n indexre teljesül

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \frac{1}{n^2+1} < 1 < \varepsilon,$$

így $N = 1$ megfelelő. $\varepsilon = 10^{-2}$-hoz választható $N = 10$ küszöbindexnek.

4.53. $\frac{n+1}{n-1} \to 1$. Legyen $\varepsilon > 0$. Minden $n \geq 2$ indexre

$$\left|\frac{n+1}{n-1} - 1\right| = \frac{2}{n-1} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon} + 1.$$

Így a konvergencia definíciójában ε-hoz $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} + 1\right] + 1$ megfelelő. Az $\varepsilon = 10^{-2}$ hibakorláthoz választhatjuk a $N = 202$ számot.

4.54. Legyen $P > 0$. Teljesül $n^2 > P$, ha $n > \sqrt{P}$, ezért a végtelen határérték definíciójában $N = \left[\sqrt{P}\right] + 1$ megfelel küszöbindexnek. A $P = 10^3$ számhoz választhatjuk $N = 32$-t.

4.55. Legyen $P > 0$. Fennáll $4n^3 > P$, ha $n > \sqrt[3]{\frac{P}{4}}$, ezért a végtelen határérték definíciójában $N = \left[\sqrt[3]{\frac{P}{4}}\right] + 1$ megfelel küszöbindexnek. $P = 10^3$-hoz megfelelő $N = 7$.

4.56. Legyen $P > 0$. A Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva

$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > P,$$

ha $n > P - 1$. A $[P-1]+1$ egész szám lehet 1-nél kisebb, ezért a végtelen határérték definíciójában

$$N = \max\{[P-1]+1, 1\}$$

alkalmas küszöbindexnek. $P = 10^3$-hoz megfelelő $N = 1000$.

4.57. Legyen $P > 0$. Minden n pozitív egészre $n! \geq n$, így érvényes $n! > P$, ha $n > P$. Tehát $N = [P] + 1$ alkalmas küszöbindexnek a végtelen határérték definíciójában. $P = 10^3$-hoz megfelelő $N = 1001$.

4.58. Legyen $P > 0$. Mivel minden n pozitív egész számra

$$\ln n > P \iff n > e^P,$$

ezért $N = [e^P] + 1$ megfelel küszöbindexnek a végtelen határérték definíciójában. $P = 10^3$-hoz alkalmas $N = \left[e^{10^3}\right] + 1$.

4.59. Legyen $P < 0$. Mivel

$$-2n + 1 < P \iff n > \frac{1-P}{2},$$

ezért $N = \left[\frac{1-P}{2}\right] + 1$ megfelel küszöbindexnek a mínusz végtelen határérték definíciójában. A $P = -10^6$ számhoz alkalmas $N = 5 \cdot 10^5 + 1$.

4.60. Legyen $P < 0$. Mivel

$$-n^4 < P \iff n > \sqrt[4]{-P},$$

így a mínusz végtelen határérték definíciójában $N = \left[\sqrt[4]{-P}\right] + 1$ alkalmas küszöbindexnek. $P = -10^6$-hoz megfelelő $N = 32$.

4.61. Legyen $P < 0$. Itt

$$-3^n < P \iff 3^n > -P,$$

és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n > -P$$

teljesül, ha $n > -\frac{P+1}{2}$. Ezért $N = \left[-\frac{P+1}{2}\right] + 1$ megfelelő. $P = -10^6$-hoz alkalmas választás $N = 5 \cdot 10^5$.

4.86. $a_n \to 0$ definíciója:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists N \in \mathbb{N}^+ \, \forall n \in \mathbb{N}^+ \, (n \geq N \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon).$$

$|a_n| \to 0$ definíciója:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists N \in \mathbb{N}^+ \, \forall n \in \mathbb{N}^+ \, (n \geq N \Longrightarrow ||a_n| - 0| < \varepsilon).$$

Az egyenlőtlenség mindkét esetben $|a_n| < \varepsilon$, tehát a két állítás ekvivalens.

4.87. $a_n \to 0$ definíciója:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists N \in \mathbb{N}^+ \, \forall n \in \mathbb{N}^+ \, (n \geq N \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon).$$

$\dfrac{1}{a_n} \to \infty$ definíciója:

$$\forall P \in \mathbb{R}^+ \, \exists N \in \mathbb{N}^+ \, \forall n \in \mathbb{N}^+ \, \left(n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{a_n} > P \right).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) bizonyítása: Legyen P pozitív szám. $a_n \to 0$ definíciójában $\varepsilon = \dfrac{1}{P} > 0$-hoz is van olyan N küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ index esetén

$$|a_n| < \frac{1}{P} \iff \frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > P.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) bizonyítása: Legyen $\varepsilon > 0$. $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$ definíciójában $P = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$-hoz is van olyan N küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ index esetén

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff |a_n| = a_n < \varepsilon.$$

4.88. $a_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros}, \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan}. \end{cases}$

A sorozat felülről nem korlátos, mert az arkhimédészi axióma szerint minden K számnál van nagyobb n pozitív egész, így $a_{2n} = 2n > n > K$.

A sorozat nem tart végtelenhez, hiszen például $P = 1$-hez nincs olyan N küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ index esetén $a_n > 1$.

4.89. Írjuk fel a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1).$$

Legyen $P > 0$, akkor

$$n > \max\left\{ \left[\frac{P-1}{q-1} \right] + 1, 1 \right\} \Longrightarrow n > \frac{P-1}{q-1} \Longrightarrow q^n \geq 1 + n(q-1) > P,$$

ezért a definíció alapján $q^n \to \infty$.

4.90. Ha $q = 0$, akkor $q^n = 0 \to 0$.

Ha $0 < |q| < 1$, akkor $\dfrac{1}{|q|} > 1$. Alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Legyen $a = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0$, majd vegyük a kapott egyenlőtlenség reciprokát:

$$|q|^n \leq \frac{1}{1 + an} < \frac{1}{an}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$, akkor

$$n > \left[\frac{1}{a\varepsilon}\right] + 1 \implies n > \frac{1}{a\varepsilon} \implies |q|^n < \frac{1}{an} < \varepsilon,$$

tehát a definíció alapján következik $q^n \to 0$.

4.95. A rendőrszabály segítségével bizonyítjuk, hogy $\sqrt[n]{7 + \sin n} \to 1$. Egyrészt

$$\sqrt[n]{7 + \sin n} \geq \sqrt[n]{7 - 1} = \sqrt[n]{6} \to 1.$$

Másrészt

$$\sqrt[n]{7 + \sin n} \leq \sqrt[n]{7 + 1} = \sqrt[n]{8} \to 1.$$

4.103. A sorozat divergens, mivel a páros indexű tagok $-\infty$-hez, a páratlan indexűek pedig 2-höz tartanak.

4.115. Emeljük ki a számlálóból és a nevezőből is a legnagyobb hatványt, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{n^5 + 5n - 1}{n^2 - n^6 + 1} = \frac{n^5\left(1 + \frac{5}{n^4} - \frac{1}{n^5}\right)}{n^6\left(\frac{1}{n^4} - 1 + \frac{1}{n^6}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{5}{n^4} - \frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^4} - 1 + \frac{1}{n^6}} \to 0 \cdot 1 = 0.$$

4.116. A számlálóból és a nevezőből is emeljük ki n^2-et, majd egyszerűsítsünk vele:

$$\frac{3n^2 + 2n + 1}{n + 2n^2} = \frac{n^2\left(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n} + 2\right)} = \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + 2} \to \frac{3}{2}.$$

4.117. A számlálóból és a nevezőből is kiemeljük a legnagyobb hatványt, utána egyszerűsítünk:

$$\frac{2n^4 - 3n^2}{n^2 - 6n + 1} = \frac{n^4\left(2 - \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = n^2 \cdot \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}} \to \infty.$$

4.118. $$\frac{2n^2-3n^3+1}{n^2-7}=n\cdot\frac{\frac{2}{n}-3+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{7}{n^2}}\to-\infty.$$

4.119. $$\frac{4n^2-3n}{5n-7n^2}=\frac{4-\frac{3}{n}}{\frac{5}{n}-7}\to-\frac{4}{7}.$$

4.120. $$\frac{10n^2+2-7n}{2-n^3}=\frac{\frac{10}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{7}{n^2}}{\frac{2}{n^3}-1}\to 0.$$

4.121. $$\frac{n^2+3}{\sqrt{n^4+4n}}=\frac{\frac{n^2+3}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^4+4n}}{n^2}}.=\frac{1+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}}\to 1.$$

4.122. $$\frac{2n^2+3n+n^3}{2n^3+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+1}{2+\frac{1}{n^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\to\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

4.123.

$$\frac{n\sin n+n^2\cos n}{n^3}=\frac{1}{n^2}\sin n+\frac{1}{n}\cos n\to 0+0=0,$$

mert mindkét tag nullsorozat és korlátos sorozat szorzata, így nullsorozat.

4.124. Egyszerűsítünk $n^{\frac{7}{3}}$-nal:

$$\frac{2n^2+3n+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{5n^7+n^3+1}}=\frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+\frac{3}{\sqrt[3]{n^4}}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{5+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^7}}}\to\frac{0}{\sqrt[3]{5}}=0.$$

4.125.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0,$$

hiszen a nevező végtelenhez tart.

4.126.

$$\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}=\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}\right)\frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\to 0.$$

4.127. $$\sqrt{n^2+n}-n=(\sqrt{n^2+n}-n)\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\to\frac{1}{2}.$$

4.128. $\sqrt{n^2-n}-n=(\sqrt{n^2-n}-n)\dfrac{\sqrt{n^2-n}+n}{\sqrt{n^2-n}+n}=\dfrac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}\to-\dfrac{1}{2}.$

4.129. $\sqrt{n^2-1}-n=(\sqrt{n^2-1}-n)\dfrac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2-1}+n}=\dfrac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}\to 0.$

4.130. Becsüljük a sorozatot mindkét oldalról!

$$1\le\sqrt[n]{n^2+n}\le\sqrt[n]{n^2+n^2}=\sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2.$$

A felső becslés is 1-hez tart, mert $\sqrt[n]{2}\to 1$ és $\sqrt[n]{n}\to 1$. Így a rendőrszabályt alkalmazva $\sqrt[n]{n^2+n}\to 1$.

4.131. Becsüljük alulról a kifejezés alapját:

$$n^7-7n=n(n^6-7)\ge 1,\ \text{ ha }\ n\ge 2.$$

Ezért minden $n\ge 2$ pozitív egészre

$$1\le\sqrt[n]{n^7-7n}\le\sqrt[n]{n^7}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^7.$$

$\sqrt[n]{n}\to 1$ szerint a felső becslés határértéke is 1, ezért a rendőrszabályt alkalmazva $\sqrt[n]{n^7-7n}\to 1$.

4.132.

$$5=\sqrt[n]{5^n}\le\sqrt[n]{4^n+5^n}\le\sqrt[n]{5^n+5^n}=\sqrt[n]{2}\cdot 5,$$

ebből a rendőrszabály alapján következik $\sqrt[n]{4^n+5^n}\to 5$.

4.133.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{5}}\cdot 5=\sqrt[n]{\frac{1}{5}\cdot 5^n}\le\sqrt[n]{2\cdot 4^n+5^{n-1}}\le\sqrt[n]{2\cdot 5^n+\frac{1}{5}\cdot 5^n}\le\sqrt[n]{\frac{11}{5}}\cdot 5,$$

majd a rendőrszabályt alkalmazzuk, az eredmény $\sqrt[n]{2\cdot 4^n+5^{n-1}}\to 5$.

4.134.

$$4=\sqrt[n]{4^n}\le\sqrt[n]{2^{2n}+3^{n+1}}=\sqrt[n]{4^n+3\cdot 3^n}\le\sqrt[n]{4\cdot 4^n}\le\sqrt[n]{4}\cdot 4,$$

majd használjuk a rendőrszabályt, így $\sqrt[n]{2^{2n}+3^{n+1}}\to 4$.

4.135. Ha n páros, akkor $n!$ tényezőinek első felét 1-gyel, a második felét $\dfrac{n}{2}$-vel becsüljük alulról:

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot n}\ge\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}=\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Ha n páratlan, akkor $n!$ első $\frac{n-1}{2}$ darab tényezőjét 1-gyel, a többi $\frac{n+1}{2}$ darab tényezőt $\frac{n+1}{2}$-vel becsüljük alulról:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \ldots \cdot n} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} > \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Tehát $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ minden n indexre, így a rendőrszabály szerint $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.

4.136.

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}$$
$$\to \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e}.$$

4.137. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden n indexre

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n,$$

ezért a rendőrszabály következtében $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \to \infty$.

4.138. Vegyük az n-edik tag reciprokát:

$$1 \geq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n.$$

Alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget a jobb oldalra:

$$\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2+1},$$

utána a rendőrszabály szerint $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} \to 1$, és ebből következik $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

Más megoldás:

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{e},$$

mert $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton növekszik, határértéke e, és az n-edik gyök alatt ennek egy részsorozata áll. A rendőrszabályt alkalmazva $\sqrt[n]{e} \to 1$ miatt $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

4.139. $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \to e \cdot 0 = 0.$

4.140. Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat $6n$ indexű részsorozatának határértéke is e, ezért

$$\left(1+\frac{1}{6n}\right)^n = \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{6n}} \to \sqrt[6]{e}.$$

4.141.

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n-1} = \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1} \to e^{\frac{3}{2}} \cdot 1 = e^{\frac{3}{2}}.$$

4.142.

$$\left(1+\frac{1}{7n}\right)^{2n-1} = \left(\left(1+\frac{1}{7n}\right)^{7n}\right)^{\frac{2}{7}} \left(1+\frac{1}{7n}\right)^{-1} \to e^{\frac{2}{7}}.$$

4.143. Legyen $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk n darab $1+\frac{3}{n}$ és egyetlen 1 számra:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+4}{n+1} = 1+\frac{3}{n+1},$$

majd $(n+1)$-edik hatványra emeljük a kapott egyenlőtlenséget. Így $a_n < a_{n+1}$, vagyis a sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért van határértéke. Minden részsorozatának ugyanez a határértéke.

$$a_{3n} = \left(1+\frac{3}{3n}\right)^{3n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 \to e^3,$$

így $a_n \to e^3$.

4.144. Legyen $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+1}$. Először tekintsük az $a_n^* = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ sorozatot! Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget n darab $1 - \frac{2}{n}$ és egyetlen 1 számra:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1 - \frac{2}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Ezt $(n+1)$-edik hatványra emelve az $a_n^* < a_{n+1}^*$ egyenlőtlenséget kapjuk. A szigorúan monoton növekvő (a_n^*) sorozatnak van határértéke, mely az (a_{2n}^*) részsorozat határértéke is.

$$a_{2n}^* = \left(1 - \frac{2}{2n}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to \left(\frac{1}{e}\right)^2,$$

ezért

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right) \to \frac{1}{e^2}.$$

4.145. Legyenek

$$a_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n+2}, \quad a_n^* = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n.$$

Az utóbbi sorozat szigorúan monoton növekvő, melynek igazolására írjuk fel a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget n darab $1 + \frac{5}{n}$ és egyetlen 1 számra:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n \cdot 1} \le \frac{n\left(1 + \frac{5}{n}\right) + 1}{n+1} = 1 + \frac{5}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{5}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Mivel minden monoton sorozatnak létezik határértéke, amely egyben a sorozat minden részsorozatának is határértéke, így

$$a_{5n}^* = \left(1 + \frac{5}{5n}\right)^{5n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^5 \to e^5,$$

ezért $a_n^* \to e^5$. Ebből következik

$$a_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{3n+2} = \left(\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n\right)^3 \left(1 + \frac{5}{n}\right)^2 \to e^{15}.$$

4.146. Legyenek

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{4n+1}, \quad a_n^* = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n}.$$

Az (a_n^*) sorozat szigorúan monoton növekvő, mert a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget n darab $1 - \frac{2}{3n}$ és egyetlen 1 számra alkalmazva

$$\sqrt[n+1]{\left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n} \cdot 1} \leq \frac{n\left(1 - \frac{2}{3n}\right) + 1}{n+1} = 1 - \frac{2}{3(n+1)}$$

$$\Longrightarrow \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n} \leq \left(1 - \frac{2}{3(n+1)}\right)^{n+1}.$$

Minden monoton sorozatnak van határértéke, és az egyúttal a sorozat minden részsorozatának is a határértéke.

$$a_{2n}^* = \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 2n}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{2}{3}} \to \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}},$$

így $a_n^* \to e^{-\frac{2}{3}}$. Végül

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{4n+1} = \left(\left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n}\right)^{4} \left(1 - \frac{2}{3n}\right) \to e^{-\frac{8}{3}}.$$

4.147. $$\frac{3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 5^{n+1}}{7 \cdot 2^{2n} - 5 \cdot 3^{n+1}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{n} \cdot \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n} + 10}{7 - 15 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n}} \to \infty.$$

4.148.

$$\frac{n - 25^{n-1}}{5^{2n+1} - 3n^4} = \frac{\frac{n}{25^n} - \frac{1}{25}}{5 - 3\frac{n^4}{25^n}} \to -\frac{1}{125},$$

mert $\frac{n^k}{a^n} \to 0$, ha k valós szám és $a > 1$.

4.149.

$$\frac{3^n + n^3}{n^n + 3^3} = \frac{\frac{3^n}{n^n} + \frac{1}{n^{n-3}}}{1 + \frac{27}{n^n}} \to 0,$$

mert minden a valós számra $\frac{a^n}{n^n} \to 0$.

4.150.

$$\frac{\sqrt{n}\,2^{n+5}}{5^n+5^{-n}}=\frac{2^5\sqrt{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{25}\right)^n}\to 0,$$

hiszen ha k valós szám és $|q|<1$, akkor $n^kq^n\to 0$.

4.151.

$$\frac{n!-2^n}{1+n^5 10^n}=\frac{n!}{n^5 10^n}\cdot\frac{1-\frac{2^n}{n!}}{\frac{1}{n^5 10^n}+1}=\frac{2^n}{n^5}\cdot\frac{n!}{20^n}\cdot\frac{1-\frac{2^n}{n!}}{\frac{1}{n^5 10^n}+1}\to\infty,$$

ugyanis $\dfrac{a^n}{n^k}\to\infty$ és $\dfrac{n!}{a^n}\to\infty$, ha $a>1$ és k valós szám.

4.152. Ha $|q|<1$, $a>1$ és k tetszőleges valós szám, akkor $n^kq^n\to 0$, $\dfrac{n^k}{a^n}\to 0$, $\dfrac{\ln n}{a^n}\to 0$, ezért

$$\frac{n^2 10^{n+2}-3n^{2019}}{5^{2n}+\ln n}=n^2\left(\frac{10}{25}\right)^n\cdot\frac{100-3\frac{n^{2017}}{10^n}}{1+\frac{\ln n}{25^n}}\to 0\cdot 100=0.$$

4.153.

$$\frac{n\,2^n-5^{n-1}}{3^{2n}}=n\left(\frac{2}{9}\right)^n-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{9}\right)^n\to 0,$$

hiszen ha $|q|<1$, akkor $q^n\to 0$ és $nq^n\to 0$.

4.154.

$$\frac{2n^{99}-n^2 2^{2n}}{2n^4+3\cdot 4^{n-1}}=\frac{2\frac{n^{99}}{4^n}-n^2}{2\frac{n^4}{4^n}+\frac{3}{4}}\to-\infty,$$

mert minden k valós számra $\dfrac{n^k}{4^n}\to 0$.

4.155.

$$\frac{n^{100}-\sqrt{n}\,(n^2+1)}{2^{n-1000}}=2^{1000}\left(\frac{n^{100}}{2^n}-\frac{n^{\frac{5}{2}}}{2^n}-\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n}\right)\to 0,$$

ugyanis minden k valós számra $\dfrac{n^k}{2^n}\to 0$.

4.156. $$\frac{\sqrt{n}+4^{n-1}-3n^2}{3^n-7n+n!}=\frac{\frac{\sqrt{n}}{n!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4^n}{n!}-3\frac{n^2}{n!}}{\frac{3^n}{n!}-7\frac{n}{n!}+1}\to 0.$$

4.157. $$\frac{2\,n^3 3^n-2^{2n-2}}{n^4-n+1}=\frac{4^n}{n^4}\cdot\frac{2n^3\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}\to\infty\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\infty.$$

4.158. $\dfrac{\sqrt{n}\,5^n - 2^{3n+2}}{n^{100} + 3^{2n-1}} = \dfrac{\sqrt{n}\,5^n - 4\cdot 8^n}{n^{100} + \frac{1}{3}\cdot 9^n} = \dfrac{n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{9}\right)^n - 4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n}{\frac{n^{100}}{9^n} + \frac{1}{3}} \to 0.$

4.159.

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{2^{2n} + 3^{n+4} + 1} = \sqrt[n]{4^n + 81\cdot 3^n + 1} \le \sqrt[n]{83}\cdot 4,$$

majd a rendőrszabály szerint $\sqrt[n]{2^{2n} + 3^{n+4} + 1} \to 4$.

4.160.

$$27 = \sqrt[n]{3^{3n}} \le \sqrt[n]{2\cdot 3^{3n+1} + 8\cdot 5^{2n-1}} = \sqrt[n]{6\cdot 27^n + \frac{8}{5}\cdot 25^n} \le \sqrt[n]{\frac{38}{5}}\cdot 27,$$

melyből a rendőrszabály alapján $\sqrt[n]{2\cdot 3^{3n+1} + 8\cdot 5^{2n-1}} \to 27$.

4.161. Triviális felső becsléssel

$$\sqrt[n]{7\cdot 3^{2n+3} - 2^{3n+2}} < \sqrt[n]{7\cdot 3^{2n+3}} = \sqrt[n]{7\cdot 3^3}\cdot 9,$$

és alsó becslés

$$\sqrt[n]{7\cdot 3^{2n+3} - 2^{3n+2}} = \sqrt[n]{7\cdot 3^3\cdot 9^n - 4\cdot 8^n} > \sqrt[n]{7\cdot 3^3\cdot 9^n - 4\cdot 9^n} = \sqrt[n]{7\cdot 3^3 - 4}\cdot 9.$$

Tehát

$$\sqrt[n]{7\cdot 3^3 - 4}\cdot 9 < \sqrt[n]{7\cdot 3^{2n+3} - 2^{3n+2}} < \sqrt[n]{7\cdot 3^3}\cdot 9,$$

utána a rendőrszabályt alkalmazzuk, az eredmény

$$\sqrt[n]{7\cdot 3^{2n+3} - 2^{3n+2}} \to 9.$$

4.162.

$$9 = \sqrt[n]{3^{2n}} \le \sqrt[n]{n8^n + 3^{2n}} = \sqrt[n]{n8^n + 9^n} \le \sqrt[n]{2n\cdot 9^n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\cdot 9.$$

$\sqrt[n]{2} \to 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$, így a rendőrszabály szerint $\sqrt[n]{n8^n + 3^{2n}} \to 9$.

4.163. $\dfrac{n^4}{4^n} \to 0$, ezért a definíció szerint $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$-hez is létezik olyan N küszöbindex, hogy minden $n \ge N$ indexre $\left|\dfrac{n^4}{4^n}\right| < \dfrac{1}{2}$. Ekkor

$$4\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \le 4\sqrt[n]{1 - \frac{n^4}{4^n}} = \sqrt[n]{4^n - n^4} \le 4$$

ezért a rendőrszabály alapján következik $\sqrt[n]{4^n - n^4} \to 4$.

4.170. Mivel $\sqrt{n+2} \to \infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, ezért a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint $\operatorname{arctg}\sqrt{n+2} \to \frac{\pi}{2}$.

4.181. Bontsuk két sorozat szorzatára az eredeti sorozatot:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Mivel

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e \quad \text{és} \quad 1+\frac{1}{n} \to 1,$$

ezért a szorzat-szabály szerint

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e.$$

4.198. Legyen az $a_n \to a$ konvergencia definíciójában $\varepsilon = \frac{a-1}{2} > 0$. Van olyan N küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ index esetén

$$|a_n - a| < \frac{a-1}{2} \implies a_n > \frac{a+1}{2} > 1 \implies a_n^n > \left(\frac{a+1}{2}\right)^n \to \infty.$$

A rendőrszabály szerint $a_n^n \to \infty$.

4.199. Az $a_n \to \infty$ határérték definíciójában $P = 1$-hez is van olyan N küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ index esetén $a_n > 1$, ezért $a_n^n > a_n$. Mivel $a_n \to \infty$, a rendőrszabály szerint $a_n^n \to \infty$.

4.200. Ha $a_n \to a$, akkor $|a_n| \to |a|$. Az utóbbi konvergencia definíciójában $\varepsilon = \frac{1-|a|}{2} > 0$-hoz van olyan N küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ index esetén

$$\big||a_n| - |a|\big| < \frac{1-|a|}{2},$$

ezért

$$0 \leq |a_n| < \frac{1+|a|}{2} < 1 \implies 0 \leq |a_n^n| < \left(\frac{1+|a|}{2}\right)^n.$$

$0 < \frac{1+|a|}{2} < 1$ miatt $\left(\frac{1+|a|}{2}\right)^n \to 0$, ezért a rendőrszabály szerint $|a_n^n| \to 0$. Ezzel ekvivalens $a_n^n \to 0$.

4.201. Az (a_n) sorozat tagjai egy indextől pozitívak, így ha (a_n^n)-nek van határértéke, az nemnegatív valós szám vagy végtelen. Mindegyik lehet:

- $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ és $\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n = \dfrac{1}{n} \to 0$.
- Ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \to 1$ és $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \to a$.
- $\sqrt[n]{n} \to 1$ és $\left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n \to \infty$.

4.202. $a_n^n \to 0$.

4.203. Írjuk fel a számtani és a mértani közép közti egyetlőtlenséget $n-2$ darab 1 és két darab $\sqrt{n}$ tagra:

$$1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \le \frac{(n-2)\cdot 1 + 2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Ebből a rendőrszabály szerint következik $\sqrt[n]{n} \to 1$.

4.204. Legyen először $a \ge 1$. Felső becslésként a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk $n-1$ darab 1 és egyetlen a tagra:

$$1 \le \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a} \le \frac{(n-1)\cdot 1 + a}{n} = 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Innen a rendőrszabály alapján $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Legyen most $0 < a < 1$, ekkor $\dfrac{1}{a} > 1$. Erre az esetre már beláttuk, hogy $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} \to 1$, és ebből következik

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1.$$

4.205. Legyen $a_n \to a > 0$, akkor $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$-höz is létezik olyan N küszöbindex, melyre minden $n \ge N$ index esetén

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \iff 0 < \frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2} \iff 0 < \sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} \to 1$ és $\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} \to 1$, ezért a rendőrszabály szerint $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

4.206. Az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozat tagjai egy indextől 1-nél nagyobbak, ezért ha van határértéke, az 1, 1-nél nagyobb valós szám vagy végtelen. Mindegyik lehet:

- $n \to \infty$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$.
- Ha $a > 1$, akkor $a^n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a^n} = a \to a$.

- $n^n \to \infty$ és $\sqrt[n]{n^n} = n \to \infty$.

4.207. Az $(\sqrt[n]{a_n})$ sorozat tagjai egy indextől 1-nél kisebbek, így ha van határértéke, az nemnegatív valós szám és legfeljebb 1. Mindegyik lehet:

- $\dfrac{1}{n^n} \to 0$ és $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \dfrac{1}{n} \to 0$.
- Ha $0 < a < 1$, akkor $a^n \to 0$ és $\sqrt[n]{a^n} = a \to a$.
- $\dfrac{1}{n} \to 0$ és $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

4.208. $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ nullsorozat és $(\sin n)$ korlátos sorozat, ezért a szorzatuk nullsorozat.

4.209. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ és $\dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{n} \neq 0$ alapján $\dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1$.

4.211. Az (a_n) sorozat korlátossága azt jelenti, hogy léteznek olyan K_1, K_2 valós számok, melyekre $K_1 \leq a_n \leq K_2$ minden n index esetén. Legyen $K = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, akkor

$$-K \leq K_1 \leq a_n \leq K_2 \leq K \implies |a_n| \leq K$$

minden n indexre.

Ha $|a_n| \leq K$ minden n indexre, akkor $-K$ alsó, K pedig felső korlátja a sorozatnak, tehát (a_n) korlátos.

4.212. Ha (a_n) és (b_n) korlátos sorozat, akkor létezik olyan K_a és K_b valós szám, melyre minden n index esetén $|a_n| \leq K_a$ és $|b_n| \leq K_b$. Ezeket összeszorozva $|a_n b_n| \leq K_a K_b$ minden n indexre, tehát $(a_n b_n)$ korlátos.

4.213. Nem igaz, például $a_n = 1$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ korlátos sorozatok, de $\dfrac{a_n}{b_n} = n$, $n \in \mathbb{N}^+$ nem korlátos.

4.214. Igaz. Legyen a két konvergens sorozat $a_n \to A \in \mathbb{R}$ és $b_n \to B \in \mathbb{R}$. A konvergencia definíciója szerint minden $\varepsilon > 0$ esetén, így $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz is létezik olyan N_a pozitív egész, melyre minden $n \geq N_a$ index esetén $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, valamint létezik olyan N_b pozitív egész, melyre minden $n \geq N_b$ index esetén $|b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $n \geq \max\{N_a, N_b\}$ indexre

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.215. Igen, igaz. Indirekten bizonyítjuk: ha a $c_n = a_n + b_n$ sorozat konvergens lenne, akkor a $b_n = c_n - a_n$ is konvergens lenne, pedig a feltevés szerint divergens.

4.217. Nem igaz. Például

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \quad \text{és} \quad b_n = (-1)^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

divergens, de $(a_n + b_n)$ a 0 konstanssorozat, ami konvergens.

4.218. Nem igaz. Például

$$a_n = b_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

divergens, de $(a_n b_n)$ az 1 konstanssorozat, mely konvergens.

4.219. Igaz. Legyen a két konvergens sorozat $a_n \to A \in \mathbb{R}$ és $b_n \to B \in \mathbb{R}$. A (b_n) sorozat konvergens, ezért korlátos, tehát van olyan K valós szám, hogy minden n indexre $|b_n| \leq K$. A konvergencia definíciója szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N_a pozitív egész, melyre minden $n \geq N_a$ index esetén

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(K+1)},$$

valamint létezik olyan N_b pozitív egész, melyre minden $n \geq N_b$ index esetén

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}.$$

Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $n \geq \max\{N_a, N_b\}$ indexre

$$|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2(K+1)} \cdot K + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.220. Nem igaz. Például a 0 konstanssorozat konvergens és (n) divergens sorozat, a szorzatuk pedig a 0 konstanssorozat, mely konvergens.

Olyan ellenpélda is van, ahol a konvergens sorozat egyik tagja sem nulla. Például $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ konvergens és (n) divergens, de a szorzatuk $(1/n)$, amely konvergens.

4.226. Nem ekvivalens. Például az

$$a_n = \begin{cases} b, & \text{ha } n \text{ páros} \\ n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

sorozat divergens, de igaz rá az állítás akármilyen $\varepsilon > 0$ esetén is.

Megjegyzés: Az állítás pontosan akkor igaz, ha a sorozatnak van korlátos részsorozata.

4.236. Legyen $P > 0$.

$$\log_a n > P \iff n > a^P$$

szerint a $\log_a n \to \infty$ határérték definíciójában P-nek megfelel a $N = [a^P] + 1$ küszöbindex.

4.237. Legyen $P > 0$.

$$\sqrt[k]{n} > P \iff n > P^k$$

alapján a $\sqrt[k]{n} \to \infty$ határérték definíciójában P-hez választhatjuk a $N = [P^k] + 1$ küszöbindexet.

4.238. A határérték definíciójában bármely $P > 0$-hoz megfelelő a $N = [\sqrt[k]{P}] + 1$ küszöbindex.

4.239. Írjuk fel a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1).$$

Legyen $P > 0$.

$$1 + n(a-1) > P \iff n > \frac{P-1}{a-1} \implies a^n > P,$$

tehát az $a^n \to \infty$ határérték definíciójában P-hez választhatjuk a $N = \left[\frac{P-1}{a-1}\right] + 1$ küszöbindexet.

4.240. $n! \geq n$ szerint a határérték definíciójában bármely $P > 0$-hoz megfelelő $N = [K] + 1$.

4.241. $n^n \geq n$ alapján a határérték definíciójában bármely $P > 0$-hoz választhatjuk a $N = [K] + 1$ küszöbindexet.

4.242. Mivel $\sqrt[n]{n} \to 1$ és a $\log_a$ függvény folytonos az 1 helyen, ezért

$$\frac{\log_a n}{n} = \log_a \sqrt[n]{n} \to \log_a 1 = 0.$$

4.243. Először $k = 1$ esetén igazoljuk az állítást: Ha $n \geq 2$, akkor a binomiális tételből következik

$$a^n = ((a-1)+1)^n > \binom{n}{2}(a-1)^2 \cdot 1^{n-2} \implies 0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{(a-1)^2} \cdot \frac{1}{n-1},$$

így a rendőrszabály szerint $\frac{n}{a^n} \to 0$.

Ha $k > 1$ pozitív egész, akkor az előző eset alapján $\frac{n}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^n} \to 0$, ezért

$$\frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^n}\right)^k \to 0.$$

4.244. Legyen $N > a$ rögzített pozitív egész. Ha $n \geq N$, akkor

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N+1} \cdot \ldots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \leq \frac{a^N}{N!} \cdot 1 \ldots 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^{N+1}}{N!} \cdot \frac{a}{n},$$

ezért a rendőrszabály szerint $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

4.245.

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

így a rendőrszabályt alkalmazva $\frac{n!}{n^n} \to 0$.

4.253. $a_n = b_n = n$.

4.254. $a_n = n + 5$, $b_n = n$.

4.255. $a_n = n$, $b_n = n + 1$.

4.256. $a_n = 2n$, $b_n = n$.

4.257. $a_n = n$, $b_n = 2n$.

4.258. $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = n$. A rendőrszabály szerint következik $a_n \to \infty$, mert

$$a_n = n + (-1)^n \geq n - 1.$$

4.271. $a_n = 0$, $b_n = n$ vagy $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$.

4.272. $a_n = \frac{1}{2n}$, $b_n = n$.

4.273. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$.

4.275. $a_n = -\dfrac{2}{n}$, $b_n = n$.

4.277. $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = n^2$.

4.278. $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = n^2$.

4.279. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$.

4.283. Mivel $a_n \to 2$, ezért van olyan N, hogy $n > N$ esetén $1{,}5 < a_n < 3$. Ezért N-től kezdve

$$a_n^n > 1{,}5^n \to \infty \quad \text{és} \quad 1 < \sqrt[n]{1{,}5} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3} \to 1.$$

Tehát a rendőrszabály szerint $a_n^n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

4.288. Mivel mindhárom sorozat végtelenhez tart, ezért valahonnan kezdve a sorozatok tagjai pozitívok (nem nullák).

A sorozatok nagyságrendjének definíciója szerint

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0, \quad \frac{b_n}{c_n} \to 0.$$

Ezért a szorzat-szabály szerint

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \to 0.$$

4.297. Nincs. Mivel $\sqrt{n} \to \infty$, ezért a sorozat minden részsorozata divergens ($\to \infty$).

4.298. A négyzetszámokból álló részsorozat tagjai mind nullák:

$$\sqrt{k^2} - \left[\sqrt{k^2}\right] = k - k = 0.$$

4.305. Igen, mert ha konvergens lenne, akkor minden részsorozata is konvergens lenne.

4.309.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists N \in \mathbb{N}^+ \; \forall m, n \in \mathbb{N}^+ \; (m, n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

4.310.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \forall N \in \mathbb{N}^+ \; \exists m, n \in \mathbb{N}^+ \; (m, n \geq N \wedge |a_m - a_n| \geq \varepsilon).$$

4.311. Legyen $\varepsilon > 0$. Olyan N küszöbindexet keresünk, melyre minden $m, n \geq N$ index esetén

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $m, n \geq N$ indexre

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{N},$$

ezért

$$\frac{2}{N} < \varepsilon \iff N > \frac{2}{\varepsilon}$$

esetén teljesül a kívánt egyenlőtlenség. Tehát ε-hoz $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ megfelel küszöbindexnek.

4.316. A Cauchy-kritériumot használjuk. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, N pedig olyan, hogy $n, m > N$ esetén

$$\frac{1}{n+m} < \varepsilon.$$

Például $N = \frac{1}{\varepsilon}$ megfelel, hiszen ha $n, m > N$, akkor $\frac{1}{n+m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon$. Ekkor

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{n+m} < \varepsilon.$$

4.321. Ha a határérték az a valós szám, akkor $a_{2n} \to a$ azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N_1 küszöbindex, melyre minden $n \geq N_1$ index esetén $|a_{2n} - a| < \varepsilon$. $a_{2n-1} \to a$ pedig azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N_2 küszöbindex, melyre minden $n \geq N_2$ index esetén $|a_{2n-1} - a| < \varepsilon$. Következik $a_n \to a$, mert ha $n \geq \max\{2N_1, 2N_2 - 1\}$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$.

4.327. Könnyen látható (például indukcióval), hogy a sorozat minden tagja pozitív. Ezután teljes indukcióval belátjuk, hogy $2 < a_n$. Ez $n = 1$ esetén igaz. Ha n-re igaz, akkor

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Most már azt is beláthatjuk, hogy a sorozat (szigorúan) monoton csökken:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < a_n \iff 2a_n < a_n^2 \iff 2 < a_n.$$

Tehát a sorozat konvergens. Jelölje a határértéket a. Ekkor

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2a_n} = \sqrt{2a}.$$

Tehát $a = \sqrt{2a}$. Mivel $a \geq 2$, ezért $a \neq 0$ és így $a = 2$.

4.330. Teljes indukcióval következik $a_n = 2^{n+1}$ minden n indexre, ezért $a_n \to \infty$.

4.331. Teljes indukcióval következik $a_n = n!$ minden n indexre, ezért $a_n \to \infty$.

4.332. Először teljes indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_1 = 1 < \sqrt{3} = a_2$. Tegyük fel, hogy valamely n-re $a_n < a_{n+1}$, akkor

$$a_n < a_{n+1} \implies 2 + a_n < 2 + a_{n+1} \implies \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}},$$

tehát $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Most szintén teljes indukcióval belátjuk, hogy a sorozatnak 2 felső korlátja. $a_1 = 1 \leq 2$. Tegyük fel, hogy valamely n-re $a_n \leq 2$, akkor

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

A sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. Legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, és képezzük a rekurzió mindkét oldalának határértékét!

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \implies a = \sqrt{2 + a} \implies a^2 - a - 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai $a = 2$ és $a = -1$, ezek valamelyike a határérték. A nemnegatív tagú sorozat határértéke is nemnegatív, így $a_n \to 2$.

4.333. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő. $a_1 = 3 > \sqrt{5} = a_2$, és ha valamely n-re $a_n > a_{n+1}$, akkor $\sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}}$, tehát $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Azt is teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a sorozatnak 2 alsó korlátja. $a_1 = 3 \geq 2$, az indukciós lépés pedig

$$a_n \geq 2 \implies a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos a sorozat, tehát konvergens. Legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Vegyük a rekurzió mindkét oldalának határértékét, az eredmény

$$a = \sqrt{2 + a}.$$

A két megoldás $a = 2$ és $a = -1$, ezek egyike a határérték. A nemnegatív tagú sorozat határértéke is nemnegatív, így $a_n \to 2$.

4.334. Teljes indukcióval igazolhatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő, valamint azt is, hogy 3 felső korlátja. Ezek alapján a sorozat konvergens. Mivel a sorozat nemnegatív tagú, a rekurzió mindkét oldalának határértékét véve következik $a_n \to 3$.

4.335. A sorozat szigorúan monoton csökkenő és alsó korlátja 3, mindkettőt teljes indukcióval igazolhatjuk. Tehát konvergens a sorozat, emellett nemnegatív tagú. Ha a rekurzió mindkét oldalának határértékét képezzük, az $a_n \to 3$ eredményre jutunk.

4.336. Minden tag pozitív, hiszen $a_n \geq \frac{4}{3}$.

Először teljes indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_1 = 1 < \frac{3}{2} = a_2$. Tegyük fel, hogy valamely n-re $a_n < a_{n+1}$, akkor

$$0 < a_n < a_{n+1} \implies \frac{1}{6}(a_n^2 + 8) < \frac{1}{6}(a_{n+1}^2 + 8),$$

vagyis $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Azt is teljes indukcióval látjuk be, hogy a sorozatnak 2 felső korlátja. $a_1 = 1 \leq 2$. Tegyük fel, hogy valamely n-re $a_n \leq 2$, akkor

$$0 \leq a_n \leq 2 \implies a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + 8) \leq \frac{1}{6}(4 + 8) = 2.$$

A sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. Legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, majd képezzük a rekurzió mindkét oldalának határértékét:

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + 8) \implies a = \frac{1}{6}(a^2 + 8) \implies a^2 - 6a + 8 = 0.$$

Az egyenlet két gyöke $a = 2$ és $a = -4$, ezek között van a határérték. A pozitív tagú sorozat határértéke nemnegatív, ezért $a_n \to 2$.

4.337. A sorozat pozitív tagú. Teljes indukcióval bizonyíthatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő és 2 alsó korlátja, ezért konvergens. Ha a rekurzió mindkét oldalának határértékét képezzük, a kapott egyenlet pozitív gyöke a határérték: $a_n \to 2$.

4.338. A sorozat szigorúan monoton növekvő, ezt teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Ezután indirekt módon igazoljuk, hogy a sorozat divergens. Tegyük fel ugyanis, hogy a sorozat konvergens, és legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Képezzük a rekurzió mindkét oldalának határértékét:

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + 8) \implies a = \frac{1}{6}(a^2 + 8) \implies a = 2 \text{ vagy } a = -4,$$

ezek valamelyikéhez konvergál a sorozat. Viszont $a_1 = 5$ és (a_n) szigorúan monoton növekvő, így a határértéke legalább 5, ezzel ellentmondásra jutottunk. Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő és divergens, vagyis $a_n \to \infty$.

4.339. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. $a_1 = 0 < \frac{12}{13} = a_2$, majd tegyük fel, hogy valamely n-re $a_n < a_{n+1}$, akkor

$$a_n < a_{n+1} \implies a_n^3 < a_{n+1}^3 \implies \frac{1}{13}(a_n^3 + 12) < \frac{1}{13}(a_{n+1}^3 + 12),$$

tehát $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Ezután ismét teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a sorozatnak felső korlátja 1. $a_1 = 0 \leq 1$, és ha valamely n-re $a_n \leq 1$, akkor

$$a_{n+1} = \frac{1}{13}(a_n^3 + 12) \leq \frac{1}{13}(1^3 + 12) = 1.$$

(a_n) szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. Legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, majd képezzük a rekurzió mindkét oldalának határértékét:

$$a_{n+1} = \frac{1}{13}(a_n^3 + 12) \implies a = \frac{1}{13}(a^3 + 12) \implies a^3 - 13a + 12 = 0.$$

A harmadfokú egyenlet együtthatóinak összege 1, tehát 1 gyöke az egyenletnek, így az $(a-1)$ gyöktényező kiemelhető:

$$0 = a^3 - 13a + 12 = (a-1)(a^2 + a - 12).$$

A másodfokú tényező gyökei -4 és 3, ezért a harmadfokú egyenlet gyökei -4, 1 és 3, ezek egyike a határérték. A sorozat nemnegatív tagú és felső korlátja 1, így $a_n \to 1$.

4.340. Teljes indukcióval beláthatjuk, hogy (a_n) pozitív tagú. A sorozat szigorúan monoton növekvő, hiszen minden n indexre

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3 + 1} > a_n.$$

Utána indirekt módon igazoljuk, hogy a sorozat divergens. Tegyük fel ugyanis, hogy konvergens, és legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Képezzük a rekurzió mindkét oldalának határértékét:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3 + 1} \implies a = a + \frac{1}{a^3 + 1}.$$

mely ellentmondásra vezet, hiszen $\frac{1}{a^3 + 1} \neq 0$. Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő és divergens, ezért $a_n \to \infty$.

4.341. A sorozat alulról korlátos és alsó korlátja $\min\{\sqrt{a}, 1\}$, mert $a_1 = 1$, majd a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}.$$

A sorozat a második tagtól kezdve monoton csökkenő, mert $n \geq 2$ esetén

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n} - a_n\right) = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0.$$

(a_n) a második tagtól kezdve monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. Legyen $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, akkor $A \geq \min\{\sqrt{a}, 1\} > 0$. Képezzük a rekurzió mindkét oldalának határértékét:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \implies A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) \implies |A| = \sqrt{a}.$$

A nemnegatív tagú sorozat határértéke is nemnegatív, így $a_n \to \sqrt{a}$.

4.342. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + a_n + \frac{a}{a_n^2}\right) \geq \sqrt[3]{a_n \cdot a_n \cdot \frac{a}{a_n^2}} = \sqrt[3]{a}.$$

Mivel $a_1 = 1$, a sorozatnak alsó korlátja $\min\{\sqrt[3]{a}, 1\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{ban^2} - a_n\right) = \frac{a - a_n^3}{3a_n^2} \leq 0,$$

ezért (a_n) a második tagtól kezdve monoton csökkenő.

A fentiek szerint a sorozat konvergens. Legyen $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, akkor

$$A \geq \min\{\sqrt[3]{a}, 1\} > 0.$$

Vegyük a rekurzió mindkét oldalának határértékét:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{a}{a_n^2}\right) \implies A = \frac{1}{3}\left(2A + \frac{a}{A^2}\right) \implies A = \sqrt[3]{a},$$

így $a_n \to \sqrt[3]{a}$.

4.343. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget $k-1$ darab a_n és egy darab $\dfrac{a}{(a_n)^{k-1}}$ számra:

$$a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right) \geq \sqrt[k]{a_n^{k-1} \cdot \frac{a}{a_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{a}.$$

Mivel $a_1 = 1$, a sorozatnak alsó korlátja $\min\{\sqrt[k]{a}, 1\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{k}\left(\frac{a}{a_n^{k-1}} - a_n\right) = \frac{a - a_n^k}{ka_n^{k-1}} \leq 0,$$

így (a_n) a második tagtól kezdve monoton csökkenő.

Az előbbiek alapján a sorozat konvergens. Legyen $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, akkor

$$A \geq \min\{\sqrt[k]{a}, 1\} > 0.$$

Tekintsük a rekurzió mindkét oldalának határértékét:

$$a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{a}{a_n^{k-1}}\right) \implies A = \frac{1}{k}\left((k-1)A + \frac{a}{A^{k-1}}\right) \implies |A| = \sqrt[k]{a}.$$

A sorozat pozitív tagú, ezért $A = \sqrt[k]{a}$, vagyis $a_n \to \sqrt[k]{a}$.

4.344. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = \infty$. Lásd a 4.283. feladatot.

4.352. Az $\left(\frac{1}{n}\right)$ nullsorozat mértaniközép-sorozata is nullsorozat:

$$G_n = \sqrt[n]{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0.$$

Más megoldás:

Mivel $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ (lásd a 4.135. feladatot), rögtön következik $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$.

Harmadik megoldás:

Először teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ez $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy n-re igaz, akkor

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség indoklása:

$$(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \iff e > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Ezután

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{e}{n}$$

és a rendőrszabály szerint $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$.

4.353. Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke e, a mértaniközép-sorozatának ugyanaz a határértéke:

$$G_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n]{\frac{2^1}{1^1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}}$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \to e.$$

Ebből következik

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n}{n+1} \to e.$$

5. Függvények lokális és globális tulajdonságai

5.1. Ha a halmaz az f valós függvény grafikonja, akkor

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D(f)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 - 2x + y^2 = 0\}.$$

Nincs ilyen f függvény, mert $(1, 1)$ és $(1, -1)$ is eleme a feladatbeli halmaznak.

5.2. Az f függvény grafikonja $\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$, ahol minden elem legfeljebb egy rendezett pár első eleme. Nincs alkalmas függvény, mert $(0, 0)$ és $(0, \pi)$ is eleme a halmaznak.

5.3. Mivel $f(0) = f(1) = 0$, így nem injektív a függvény.

5.4.

$$f_1(x) = -x, \quad D(f_1) = \mathbb{R},$$
$$f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad D(f_2) = [0, 1],$$
$$f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

is megfelelő.

5.5. A függvény nem injektív, mert például $f(2) = f(4) = 1$, így nincs inverze.

5.6. A függvény injektív, az inverze

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x}, \quad D(f^{-1}) = [0, \infty).$$

5.7. A függvény injektív, az inverze

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x - 1}{2}}, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R}.$$

5.8. A függvény injektív, az inverze

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 3\right), \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

5.9. A függvény injektív, az inverze

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \quad D(f^{-1}) = [1, \infty).$$

5.10.

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 4, \quad D(f \circ g) = \mathbb{R},$$
$$(g \circ f)(x) = (x+4)^2, \quad D(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

5.11.

$$(f \circ g)(x) = \ln(-x-1), \quad D(f \circ g) = (-\infty, -1),$$
$$(g \circ f)(x) = \ln(-x) + 1, \quad D(g \circ f) = (-\infty, 0).$$

5.12.

$$(f \circ f)(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + 1}, \quad D(f \circ f) = \mathbb{R}.$$

$$((f \circ f) \circ f)(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\right)^2}, \quad D((f \circ f) \circ f) = \mathbb{R}.$$

$$(f \circ (f \circ f))(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\right)^2}, \quad D(f \circ (f \circ f)) = \mathbb{R}.$$

5.13.

$$D((f \circ g) \circ h) = \{x \in D(h) : h(x) \in D(f \circ g)\} =$$
$$= \{x \in D(h) : h(x) \in D(g) \text{ és } g(h(x)) \in D(f)\},$$
$$D(f \circ (g \circ h)) = \{x \in D(g \circ h) : (g \circ h)(x) \in D(f)\} =$$
$$= \{x \in D(h) : h(x) \in D(g) \text{ és } g(h(x)) \in D(f)\},$$

tehát $D((f \circ g) \circ h) = D(f \circ (g \circ h))$.

Ezután a közös értelmezési tartomány minden x elemére

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))),$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))),$$

vagyis $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$.

5.18. Legyen $0 \le a < c < b$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy

$$\sqrt{c} \ge \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a}(c - a) + \sqrt{a},$$

azaz, hogy

$$\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} \geq \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}.$$

Egyszerűsítés után

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

Az egyenlőtlenség átrendezése után

$$\sqrt{b}+\sqrt{a} \geq \sqrt{c}+\sqrt{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{b} \geq \sqrt{c}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, mivel a $\sqrt{x}$ függvény (szigorúan) monoton nő.

Megjegyzés: a bizonyításból az is kiderült hogy az $\sqrt{x}$ függvény szigorúan konkáv. Ehhez csak a megfelelő helyeken szigorú egyenlőtlenséget kell írnunk a bizonyításban.

5.22. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\ (0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$.

5.23. $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f)\ (0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-L| \geq \varepsilon)$.

5.24. $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f)\ (0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-L| \geq \varepsilon)$.

5.25. $\forall P > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\ (0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > P)$.

5.26. $\exists P > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f)\ (0 < |x-a| < \delta \wedge f(x) \leq P)$.

5.27. $\forall \varepsilon > 0\ \exists P < 0\ \forall x \in D(f)\ (x < P \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$.

5.28. $\exists \varepsilon > 0\ \forall P < 0\ \exists x \in D(f)\ (x < P \wedge |f(x)-L| \geq \varepsilon)$.

5.29. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\ (|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$.

5.30. $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f)\ (|x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon)$.

5.31. Igaz, mert az (n) sorozat végtelenhez tart, így alkalmazhatjuk a végtelenbeli határértékre vonatkozó átviteli elvet:

$$n \to \infty \implies \lim_{n\to\infty} f(n) = 7.$$

5.32. Hamis, hiszen $n^2 \to \infty$ és az f függvény végtelenbeli határértékére vonatkozó átviteli elv alapján

$$n^2 \to \infty \implies \lim_{n\to\infty} f(n^2) = 7.$$

5.33. Igaz, mert $\sqrt{n} \to \infty$, így az f függvény végtelenbeli határértékére vonatkozó átviteli elv következtében

$$\sqrt{n} \to \infty \implies \lim_{n\to\infty} f(\sqrt{n}) = 7.$$

5.39. Igaz, mert $\dfrac{1}{n} \to 0$ és az f függvény 0-beli folytonosságára vonatkozó átviteli elv szerint

$$\frac{1}{n} \to 0 \implies f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0).$$

5.41. Legyen

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{-\pi/2 + 2n\pi}.$$

Kaptunk két 0-hoz tartó sorozatot, amelyekre a függvényértékek két különböző konstans sorozatot alkotnak:

$$\sin\frac{1}{x_n} = 1 \quad \text{és} \quad \sin\frac{1}{y_n} = -1.$$

5.49. Legyen (x_n) egy tetszőleges a-hoz konvergáló sorozat. Meg kell mutatnunk, hogy

$$g(f(x_n)) \to g(f(a)).$$

Mivel f folytonos a-ban és $x_n \to a$, ezért az átviteli elv szerint

$$f(x_n) = y_n \to f(a).$$

A g függvényre is alkalmazhatjuk az átviteli elvet az $f(a)$ pontban, és így

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \to f(a).$$

5.52. Legyen $p > 0$ egy (pozitív) periódus, a és b pedig két olyan valós szám, amelyre $f(a) \neq f(b)$. Ekkor

$$x_n = a + n\cdot p \to \infty,\ f(a) = f(x_n) \to f(a), \qquad y_n = b + n\cdot p \to \infty,\ f(b) = f(y_n) \to f(b).$$

Az (x_n) és az (y_n) sorozatok végtelenhez tartanak, de a függvényértékek sorozatának határértékei különböznek, tehát az átviteli elv szerint $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nem létezik.

5.56. Indirekt módon mutatjuk meg, hogy a határérték nem létezik. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x = L$. Ekkor a határértékre vonatkozó átviteli elv alapján

$$n\pi \to \infty \implies \sin(n\pi) = 0 \to L \implies L = 0,$$

és hasonlóan

$$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \to \infty \implies \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi = 1 \to L \implies L = 1,$$

ami ellentmondás.

5.60. A határérték nem létezik, amit indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} = L$. Tekintsük a következő két sorozatot:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0^+ \implies \cos\frac{1}{x_n} = \cos(2n\pi) = 1 \to 1,$$

valamint

$$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0^+ \implies \cos\frac{1}{y_n} = \cos[(2n+1)\pi] = -1 \to -1.$$

Ezekből a 0-beli jobb oldali határértékre vonatkozó átviteli elv szerint $L = 1$ és $L = -1$ következik, ami ellentmondás.

5.61. Mivel

$$0 \le \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,$$

ezért a rendőrszabály alapján következik $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

5.68. Létezik. Rendezzük nullára az egyenletet, és legyen

$$f(x) = x\sin x - \frac{\pi}{4}, \quad D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ez a függvény folytonos, valamint $f(0) = -\frac{\pi}{4} < 0$ és $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} > 0$, ezért a Bolzano-tétel alapján létezik olyan $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, melyre $f(c) = 0$, vagyis $c\sin c = \frac{\pi}{4}$.

5.69. Igen, például

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

5.70. Nincs ilyen függvény, ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy f rendelkezik a feladatbeli tulajdonságokkal, akkor minden n pozitív egészre $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. A függvény folytonos 0-ban, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint

$$\frac{1}{n} \to 0 \implies f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0) \neq 0,$$

ami ellentmond annak, hogy az $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ nullsorozat határértéke 0.

5.76. A Bolzano-tétel következtében a függvény értékkészlete intervallum. A Weierstrass-tétel szerint a függvénynek van legnagyobb értéke és van legkisebb értéke, ezért az intervallum korlátos és zárt.

Minden korlátos zárt intervallum megfelelő. Ha $D(f) = [a, b]$, akkor a $[c, d]$ intervallum például az

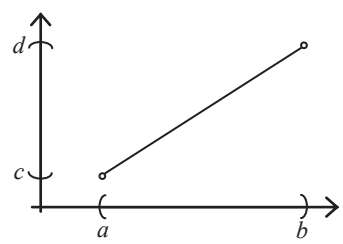
$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c, \quad a \le x \le b$$

függvény értékkészlete.

5.78. A Bolzano-tétel alapján az értékkészlet intervallum. Minden nem üres intervallum lehet az értékkészlet. Az alábbiakban erre adnak példákat az f_i függvények, ahol legyen $D(f_i) = (a, b)$, $i = 1, \ldots, 9$.

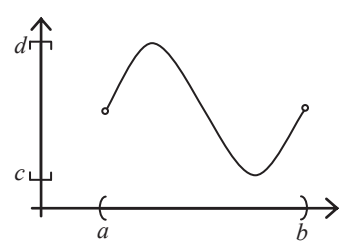
Korlátos nyílt intervallum:

$$f_1(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c, \quad R(f_1) = (c, d).$$



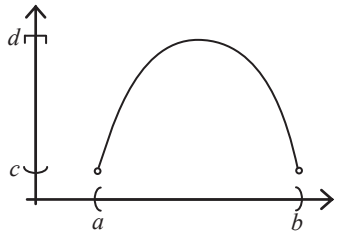
Korlátos zárt intervallum:

$$f_2(x) = \frac{d-c}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right) + \frac{c+d}{2}, \quad R(f_2) = [c, d].$$



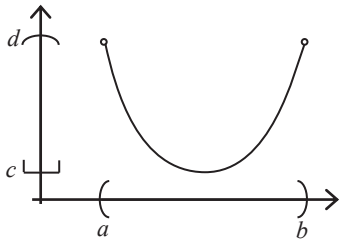
Korlátos alulról nyílt, felülről zárt intervallum:

$$f_3(x) = \frac{4(c-d)}{(b-a)^2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + d, \quad R(f_3) = (c, d].$$



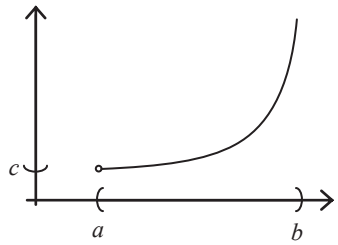
Korlátos alulról zárt, felülről nyílt intervallum:

$$f_4(x) = \frac{4(d-c)}{(b-a)^2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + c, \quad R(f_4) = [c, d).$$



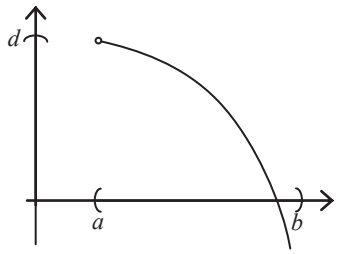
Alulról korlátos és nyílt, felülről nem korlátos intervallum:

$$f_5(x) = \frac{1}{b-x} - \frac{1}{b-a} + c, \quad R(f_5) = (c, \infty).$$



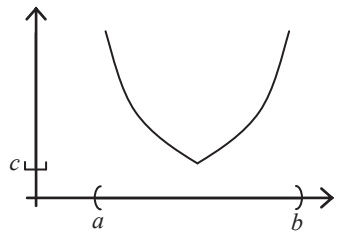
Alulról nem korlátos, felülről korlátos és nyílt intervallum:

$$f_6(x) = \frac{1}{b-a} - \frac{1}{b-x} + d, \quad R(f_6) = (-\infty, d).$$



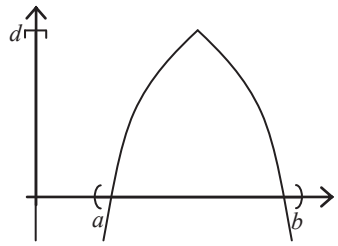
Alulról korlátos és zárt, felülről nem korlátos intervallum:

$$f_7(x) = \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)\right| + c, \quad R(f_7) = [c, \infty).$$



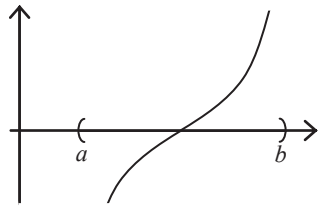
Alulról nem korlátos, felülről korlátos és zárt intervallum:

$$f_8(x) = -\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)\right| + d, \quad R(f_8) = (-\infty, d].$$



A valós számok halmaza:

$$f_9(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right), \quad R(f_9) = \mathbb{R}.$$



5.82.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\ \forall y \in D(f)\ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon),$$

másképpen

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x, y) \in D(f) \times D(f)\ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

5.83.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f)\ \exists y \in D(f)\ (|x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon),$$

másképpen

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists (x,y) \in D(f) \times D(f)\ (|x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon).$$

5.84. Egyenletesen folytonos a függvény, mert a definícióban $\varepsilon > 0$-hoz bármely $\delta > 0$ megfelelő.

5.85. f egyenletesen folytonos, mert a definícióban $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \varepsilon$ megfelelő.

5.86. A függvény egyenletesen folytonos, mert $x, y \geq 2$ esetén

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \leq \frac{1}{4}|x-y|,$$

ezért a definícióban $\varepsilon > 0$-hoz választhatjuk a $\delta = 4\varepsilon$ számot.

5.87. Indirekt módon bizonyítjuk, hogy a függvény nem egyenletesen folytonos. Tegyük fel, hogy f egyenletesen folytonos. Legyen

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n+1},$$

akkor

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \delta,$$

ha $n > \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$. Az ilyen indexekre

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n}\right| = |n - (n+1)| = 1.$$

Másrészt az egyenletes folytonosság definíciója szerint $\varepsilon = 1$-hez is létezik olyan $\delta > 0$, melyre minden $x, y \in (0,1)$ esetén

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < 1.$$

Ez ellentmondást ad, amikor $x = x_n$, $y = y_n$ és $n > \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$.

5.88. Indirekt módon igazoljuk, hogy f nem egyenletesen folytonos. Tegyük fel, hogy mégis egyenletesen folytonos. Legyen

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{2}{2n+1},$$

akkor

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)} < \frac{1}{2n^2},$$

továbbá

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\sin\frac{\pi}{x_n} - \sin\frac{\pi}{y_n}\right| = |0 - (-1)^n| = 1.$$

Viszont az egyenletes folytonosság definíciójában $\varepsilon = 1$-hez is van olyan $\delta > 0$, melyre

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < 1.$$

Ha $n > \dfrac{1}{\sqrt{2\delta}}$, akkor

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{2n^2} < \delta \implies \left|\sin\frac{\pi}{x_n} - \sin\frac{\pi}{y_n}\right| < 1,$$

ami ellentmondás.

5.89. Indirekt módon látjuk be, hogy f nem egyenletesen folytonos. Tegyük fel, hogy f egyenletesen folytonos. A definíció szerint $\varepsilon = 2$-höz is létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|x - y| < \delta \implies \left|\sin x^2 - \sin y^2\right| < 2.$$

Legyen

$$x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad y_n = \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi},$$

akkor

$$|x_n - y_n| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} - \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} - \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}} < \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}} < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Ha $n > \dfrac{\pi}{2\delta^2}$, akkor $|x_n - y_n| < \delta$, ezért a függvény egyenletes folytonosságából következik $|\sin x_n^2 - \sin y_n^2| < 2$. Viszont $\sin x_n^2 = 1$ és $\sin y_n^2 = -1$, ami ellentmondást eredményez.

5.90. Először a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$|f(x) - f(y)| = |(x - y) + (\sin x - \sin y)| \le |x - y| + |\sin x - \sin y|,$$

majd az utolsó tagot trigonometrikus azonosság alapján becsüljük:

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \le 2\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right|\cdot 1 = |x-y|,$$

ugyanis

$$|\sin z| \le |z|, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Az eredmény

$$|f(x) - f(y)| \le 2|x-y|,$$

majd innen a definíció alapján következik, hogy f egyenletesen folytonos, mert $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ megfelelő.

5.91. Megmutatjuk, hogy a függvény egyenletesen folytonos.

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \le 2\cdot 10^7|x-y|,$$

ezért a definícióban $\varepsilon > 0$-hoz választhatjuk a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\cdot 10^7}$ számot.

Más megoldás:

A Heine-tétel következtében az f folytonos függvény a $[-10^7, 10^7]$ korlátos zárt intervallumon egyenletesen folytonos, így egyenletesen folytonos annak $(-10^7, 10^7)$ részhalmazán is.

5.92. A függvény nem egyenletesen folytonos, amit indirekt módon igazolunk. Tegyük fel, hogy f egyenletesen folytonos. Legyen

$$x_n = n, \quad y_n = n + \frac{1}{n},$$

ekkor

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Ezért az egyenletes folytonosság definíciójában legyen $\varepsilon = 2$. Ehhez létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < 2.$$

Másrészt $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} < \delta$, ha $n > \dfrac{1}{\delta}$. Ilyenkor $|f(x_n) - f(y_n)| < 2$, ami ellentmond a minden n indexre érvényes alsó becslésnek.

5.93. Használjuk fel a következő becslést:

$$|f(x) - f(y)| = |(x-y)(x^2 + xy + y^2)| \le 3\left(6\cdot 10^{23}\right)^2|x-y|.$$

Ebből a definíció alapján látjuk, hogy f egyenletesen folytonos, mert $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3\left(6\cdot 10^{23}\right)^2}$ megfelelő.

Más megoldás:

A Heine-tétel szerint az f folytonos függvény a $[0, 6\cdot 10^{23}]$ korlátos zárt intervallumon egyenletesen folytonos, ezért annak minden részhalmazán egyenletesen folytonos, így $[0, 6\cdot 10^{23})$-n is.

5.94. Nem egyenletesen folytonos a függvény, ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel ugyanis, hogy f egyenletesen folytonos. Legyen

$$x_n = n, \quad y_n = n + \frac{1}{n},$$

ezekkel

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^3 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^3 \right| = 3n + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3} > 3.$$

Az egyenletes folytonosság definíciója szerint az $\varepsilon = 3$ számhoz is létezik olyan $\delta > 0$, melyre

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < 3.$$

Másfelől $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} < \delta$, ha $n > \dfrac{1}{\delta}$, amiből következik $|f(x_n) - f(y_n)| < 3$, végül ez utóbbi ellentmond a korábban kapott alsó becslésnek.

5.95. A $[0, 100]$-ra kiterjesztett $D(\tilde{f}) = [0, 100]$, $\tilde{f}(x) = \sqrt{x}$ függvény korlátos zárt intervallumon értelmezett és folytonos, ezért a Heine-tétel alapján egyenletesen folytonos. Ennek leszűkítéseként f is egyenletesen folytonos.

5.96. Ha $x, y \geq 100$, akkor

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{20}|x - y|,$$

így az egyenletes folytonosság definíciójában bármely $\varepsilon > 0$ számhoz $\delta = 20\varepsilon$ megfelelő.

5.97. Először megmutatjuk, hogy

$$x, y \geq 0 \implies \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Feltehetjük, hogy $x \geq y$, akkor

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|} \iff x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - y \iff 2y \leq 2\sqrt{xy},$$

és az utóbbi egyenlőtlenség $x \geq y$ esetén nyilvánvalóan teljesül.

Ezután a definíció alapján belátjuk, hogy a függvény egyenletesen folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$, akkor a definícióban $\delta = \varepsilon^2$ megfelelő, hiszen

$$|x-y| < \varepsilon^2 \implies \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|} < \varepsilon.$$

Más megoldás:

Bebizonyítjuk, hogy a függvény egyenletesen folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel f a $[0,1]$ korlátos zárt intervallumon a Heine-tétel szerint egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta_1 > 0$, melyre

$$0 \le x, y \le 1,\ |x-y| < \delta_1 \implies \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $x, y \ge 1$, akkor

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{1}{2}|x-y|$$

következtében

$$x, y \ge 1,\ |x-y| < \varepsilon \implies \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha $y > 1 > x \ge 0$ vagy $x > 1 > y \ge 0$, valamint $|x-y| < \min\{\delta_1, \varepsilon\}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség, majd a fentiek alapján

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \left|\sqrt{x}-\sqrt{1}\right| + \left|\sqrt{1}-\sqrt{y}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tehát az f függvény egyenletes folytonosságának definíciójában ε-hoz választhatjuk a $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon\}$ számot.

5.98. Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ és $\dfrac{\sin x}{x}$ folytonos π-ben, ezért a függvényt folytonosan kiterjeszthetjük a $[0,\pi]$ zárt intervallumra. A kiterjesztett

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \pi, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

függvény a Heine-tétel alapján egyenletesen folytonos $[0,\pi]$-n, így annak leszűkítéseként f is egyenletesen folytonos.

5.99. Igaz. Legyenek f, g olyan egyenletesen folytonos függvények, melyeknek a közös értelmezési tartománya $D(f) = D(g) = H$, és legyen $\varepsilon > 0$. Mivel f egyenletesen folytonos, így $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz is létezik olyan $\delta_1 > 0$, hogy

$$x, y \in H,\ |x-y| < \delta_1 \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hasonlóan g egyenletes folytonossága miatt létezik olyan $\delta_2 > 0$, melyre

$$x, y \in H,\ |x-y| < \delta_2 \implies |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezért ha $|x-y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \le |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| < \varepsilon.$$

5.100. Hamis, ellenpéldaként mindkét függvénynek választhatjuk a $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvényt, mert f egyenletesen folytonos, de f^2 a négyzetfüggvény $\mathbb{R}$-n, ami nem egyenletesen folytonos (lásd a 5.85. és a 5.92. feladatot).

5.101. Hamis. Ellenpélda a $(0,1)$ intervallumon $f(x) = 1$, $g(x) = x$ (lásd az 5.84. és az 5.85. feladatot).

5.102. Igaz. Legyen a két függvény f és g, megmutatjuk, hogy $f \circ g$ egyenletesen folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$, akkor f egyenletes folytonossága alapján létezik olyan $\delta > 0$, melyre minden $s, t \in D(f)$ esetén

$$|s-t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Mivel g egyenletesen folytonos, $\delta > 0$-hoz létezik olyan $\gamma > 0$, hogy minden $x, y \in D(g)$ esetén

$$|x-y| < \gamma \implies |g(x) - g(y)| < \delta.$$

Ezért ha $x, y \in D(f \circ g)$, akkor

$$|x-y| < \gamma \implies |g(x)-g(y)| < \delta \implies |f(g(x)) - f(g(y))| < \varepsilon.$$

5.103. Van. Megmutatjuk, hogy

$$D(f) = (0,1), \quad f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

megfelelő példa. A függvény korlátos, hiszen $|f| \le 1$, valamint folytonos, mert két folytonos függvény kompozíciója. Legyen

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

akkor

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{2n\pi} - \frac{2}{(4n+1)\pi}\right| = \frac{1}{2n(4n+1)\pi} < \frac{1}{8n^2\pi}$$

és

$$\left|\sin\frac{1}{x_n} - \sin\frac{1}{y_n}\right| = |0-1| = 1.$$

Ennélfogva a függvény nem egyenletesen folytonos. Valóban, indirekt módon tegyük fel, hogy mégis az. Ekkor $\varepsilon = 1$-hez is létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|x-y| < \delta \implies \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| < 1.$$

Viszont ha $n > \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi\delta}}$, akkor

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{8n^2\pi} < \delta \implies \left|\sin\frac{1}{x_n} - \sin\frac{1}{y_n}\right| < 1,$$

ami ellentmondás.

6. Végtelen sorok

6.1. Igaz. Ha s_n jelöli a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens végtelen sor n-edik részletösszegét, s_n^* pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens végtelen sorét, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ n-edik részletösszege

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = s_n + s_n^*.$$

$(s_n + s_n^*)$ két konvergens sorozat összegeként konvergens, vagyis $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergens.

6.2. Hamis, ellenpélda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$, melyek divergensek, hiszen a tagok sorozata nem tart nullához, és a két végtelen sor összege $\sum_{n=1}^{\infty} 0$, ami konvergens.

6.3. Igaz. Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nemnegatív tagú divergens végtelen sorok, akkor

$$0 \le a_n \le a_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, ezért a minoránskritérium alapján $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergens.

6.4. Igaz. Ha (s_n) jelöli a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens végtelen sor részletösszeg-sorozatát, (s_n^*) pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens végtelen sorét, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ részletösszeg-sorozata $(s_n + s_n^*)$. Ez egy konvergens és egy divergens sorozat összege, ami divergens (lásd a 4.215. feladatot), tehát $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergens.

6.5. Igaz. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ezért a tagok (a_n) sorozata nullsorozat. A határérték definíciójában $\varepsilon = 1$-hez létezik olyan N küszöbindex, melyre minden $n \ge N$ indexre $a_n = |a_n| < 1$. Ekkor $0 \le a_n^2 < a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, így a majoránskritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens.

6.6. Hamis. Ellenpélda a divergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hiperharmonikus sor konvergens.

6.7. Igaz. Két konvergens végtelen sor összegeként $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ is konvergens. Mivel

$$0 \leq (|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2|a_n||b_n| \implies |a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2),$$

ezért a majoránskritérium alapján $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ konvergens, vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ abszolút konvergens.

6.8. Következik. Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$0 \leq \left|\frac{a_n}{n}\right| = |a_n| \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergenciáját felhasználva a majoránskritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ abszolút konvergens, így konvergens is.

6.9. Megmutatjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens. Legyen $\lim_{n\to\infty} na_n = c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Ekkor $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$-höz is létezik olyan N küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ indexre

$$c > 0 \text{ esetén } na_n > \frac{c}{2} \implies a_n > \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{n} > 0,$$

valamint

$$c < 0 \text{ esetén } na_n < -\frac{c}{2} \implies -a_n > \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{n} > 0.$$

Mindkét esetben a minoránskritérium következtében $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

6.10. A definíció alapján megmutatjuk, hogy $na_n \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Alkalmazzuk a Cauchy-kritériumot a konvergens végtelen sorra! $\frac{\varepsilon}{2}$-höz létezik olyan N index úgy, hogy minden $m > n \geq N$ indexre

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A sorozat nemnegatívitását és monotonitását felhasználva $n \geq N$ és $m = 2n$ esetén

$$na_{2n} \leq a_{n+1} + \ldots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2} \implies 2na_{2n} < \varepsilon,$$

valamint $n \geq N$ és $m = 2n+1$ esetén

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) a_{2n+1} \leq (n+1)a_{2n+1} \leq a_{n+1} + \ldots + a_{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \implies (2n+1)a_{2n+1} < \varepsilon.$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan pozitív egész ($2N$), hogy minden $n \geq 2N$ indexre $|na_n| < \varepsilon$.

6.11. Mindkettő következik. Minden pozitív tagú sorozat határértéke nemnegatív, így a feladat feltétele szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to c > 0.$$

A határérték definíciójában $\varepsilon = \frac{c}{2}$-höz is van olyan N küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ indexre

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2} \implies \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \implies \frac{c}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3c}{2} \cdot b_n.$$

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $0 < a_n < \frac{3c}{2} \cdot b_n$ és a majoránskritérium alapján $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $0 < b_n < \frac{2}{c} \cdot a_n$ és a majoránskritérium következtében $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens.

6.12. A $q = 0$ esetben nyilvánvalóan abszolút konvergens a végtelen sor. Ha $q \neq 0$, akkor alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\left|\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n}\right| = \frac{n+1}{n}\,|q| \to |q| < 1,$$

ezért $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ abszolút konvergens.

Más megoldás:

Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\sqrt[n]{|nq^n|} = \sqrt[n]{n}\,|q| \to |q| < 1,$$

így $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ abszolút konvergens.

Harmadik megoldás:

Mivel $|q| < 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$, e sorozat tagjai egy indextől kezdve kisebbek a $\dfrac{|q|+1}{2|q|} > 1$ számnál:

$$\sqrt[n]{n} < \frac{|q|+1}{2|q|} \implies |nq^n| < \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$

A $\dfrac{|q|+1}{2} < 1$ kvóciensű mértani sor konvergens, ezért a majoránskritérium szerint $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ abszolút konvergens.

6.13. Ha $q = 1$, akkor $s_n = n + 1 \to \infty$ szerint az összeg végtelen.

Ha $q \neq 1$, akkor

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Ebből következik, hogy $q > 1$ esetén $s_n \to \infty$, tehát az összeg végtelen, $|q| < 1$ esetén pedig $s_n \to \dfrac{1}{1-q}$, így az összeg $\dfrac{1}{1-q}$. Végül ha $q \leq -1$, akkor (q^n) oszcillálva divergens, ezért (s_n) is, így ebben az esetben az összeg nem létezik.

6.14. Konvergens,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

6.16. Konvergens,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7 \cdot 5^n}{3^{2n+1}} = \frac{7}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{21}{4}.$$

6.18. Konvergens,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 5^{n-1}} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n+1}}\right) = \frac{5}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 1\right) + \frac{1}{10}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) = \frac{29}{40}.$$

Más megoldás:

Legyen $m = n - 1$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 5^{n-1}} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^m + \frac{1}{20} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{29}{40}.$$

6.19. Az s_n részletösszeg felírható teleszkopikus alakban:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

ezért a végtelen sor konvergens és összege 1.

6.22.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

felhasználásával teleszkopikus összeget kapunk az s_n részletösszegre:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \to \frac{1}{4}.$$

Más megoldás:

Keressünk olyan A, B, C valós számokat, melyekre

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

Ezzel ekvivalens

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1),$$

$$1 = (A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + 2A.$$

Két polinom egyenlő, így a megfelelő együtthatóik egyenlők:

$$\left. \begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ 3A+2B+C &= 0 \\ 2A &= 1 \end{aligned} \right\},$$

az egyenletrendszer megoldása

$$A = \frac{1}{2},\ B = -1,\ C = \frac{1}{2}.$$

Ezért

$$s_n = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4} \right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{\frac{1}{2}}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1}-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2}\to\frac{1}{4},$$

tehát a végtelen sor konvergens, összege $\frac{1}{4}$.

6.23. A sor n-edik tagját így alakíthatjuk át:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

és ezért

$$s_n=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1\to\infty$$

következtében a végtelen sor divergens, összege végtelen.

6.25. Az s_n részletösszeg teleszkopikus alakú:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\big(\ln k-\ln(k+1)\big)=(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\ldots+(\ln n-\ln(n+1))=$$

$$=-\ln(n+1)\to-\infty,$$

aminek alapján a végtelen sor divergens, összege mínusz végtelen.

6.26. Mivel váltakozik az előjele a végtelen sor tagjainak, az abszolútértékük sorozata monoton csökkenő és a határértéke nulla, így a Leibniz-tétel szerint konvergens a végtelen sor. Jelölje az n-edik részletösszeget s_n, a végtelen sor összegét S. A Leibniz-tételbeli hibabecslés

$$|s_n-S|\le\frac{1}{n+1},$$

így

$$\frac{1}{n+1}<10^{-3}\iff n>999$$

esetén s_n megfelelő közelítés, például $s_{1000}=\sum_{k=1}^{1000}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ilyen.

6.27. Mivel a végtelen sor váltakozó előjelű, a tagok abszolútértékének sorozata pedig monoton csökken és nullához tart, ezért a végtelen sor a Leibniz-tétel alapján konvergens. Ha a

részletösszeg-sorozat (s_n), a végtelen sor összege pedig S, akkor a Leibniz-tétel hibabecslése $|s_n - S| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$, így

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-3} \iff n \geq 6$$

esetén s_n megfelelő közelítés. Például

$$s_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{455}{720}$$

10^{-3}-nál közelebb esik a végtelen sor összegéhez.

6.28. Alkalmazzuk a minoránskritériumot:

$$\frac{1}{4n+7} \geq \frac{1}{4n+7n} = \frac{1}{11n} > 0,$$

és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11n} = \frac{1}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$ is divergens.

6.30. Ha $n \geq 2$, akkor $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$. A majoráló $1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ végtelen sor konvergens, mert

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \to 2,$$

így a majoránskritérium szerint $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens.

6.31.

$$\sqrt{2n-1} < \sqrt{2n} \implies \frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n} > 0.$$

Mivel $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, a minoránskritérium szerint $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}}$ is divergens.

6.32. Mivel

$$0 < \frac{1}{5^{n+1}+2} < \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

és az $\dfrac{1}{5}$ kvóciensű mértani sor konvergens, ezért a majoránskritérium szerint a feladatbeli végtelen sor is konvergens.

6.33. Mivel

$$0 < \frac{1}{5^{n+1}-2} < \frac{1}{5\cdot 5^n - 2\cdot 5^n} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

és az $\frac{1}{5}$ kvóciensű mértani sor konvergens, így a majoránskritérium alapján a kérdéses végtelen sor is konvergens.

6.36. Mivel

$$0 \le \frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}\cdot n} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}},$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ hiperharmonikus sor konvergens, így a majoránskritérium szerint a vizsgált végtelen sor konvergens.

6.40. Hányadoskritériumot alkalmazva:

$$\left|\frac{\frac{3(n+1)}{(n+1)^2+1}}{\frac{3n}{n^2+1}}\right| = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n\left((n+1)^2+1\right)} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} \to 1,$$

így nem tudjuk eldönteni, hogy a végtelen sor konvergens-e.

Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{3n}{n^2+n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{3n}{n^2+1}} < \sqrt[n]{\frac{3}{n}} \le 1,$$

ha $n \ge 3$, ebből $\sqrt[n]{\frac{3}{2}} \to 1$ és $\sqrt[n]{n} \to 1$ felhasználásával a rendőrszabály szerint következik $\sqrt[n]{\left|\frac{3n}{n^2+1}\right|} \to 1$. Ezért a gyökkritériummal sem tudjuk megállapítani, hogy a végtelen sor konvergens-e.

6.41. Hányadoskritériummal:

$$\left|\frac{\frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}}}{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}\right| = 2^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} \to 1,$$

mert a 2 alapú exponenciális függvény folytonos 0-ban, így az arra vonatkozó átviteli elv alapján

$$-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0 \implies 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} \to 2^0 = 1.$$

Eszerint a hányadoskritérium segítségével nem tudjuk megállapítani, hogy a végtelen sor konvergens-e.

Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \to 1,$$

ugyanis ismét a 2 alapú exponenciális függvény 0-beli folytonosságára vonatkozó átviteli elv szerint

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \implies 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 2^0 = 1.$$

Tehát a gyökkritériummal sem tudjuk eldönteni, hogy a végtelen sor konvergens-e.

6.42. Hányadoskritériummal:

$$\left| \frac{\frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}}{\frac{n^4}{2^n}} \right| = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \to \frac{1}{2} < 1,$$

ezért a végtelen sor konvergens.

Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^4}{2^n}\right|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^4}{2} \to \frac{1}{2} < 1,$$

tehát a végtelen sor konvergens.

6.45. Hányadoskritériummal:

$$\left| \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{n^n}} \right| = \frac{2(2n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \infty,$$

tehát a végtelen sor divergens.

Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(2n)!}{n^n}\right|} = \frac{4n}{\left(\frac{2n}{\sqrt[2n]{(2n)!}}\right)^2} \to \infty,$$

hiszen az $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ sorozatnak, és így a páros indexű részsorozatának határértéke is e. A végtelen sor a gyökkritérium alapján is divergens.

6.47. Hányadoskritériummal:

$$\left| \frac{\frac{(n+1)^{1848}}{e^{2n+1}}}{\frac{n^{1848}}{e^{2n-1}}} \right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1848} \frac{1}{e^2} \to \frac{1}{e^2} < 1,$$

így a végtelen sor konvergens.

Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^{1848}}{e^{2n-1}}\right|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{1848}}{\frac{e^2}{\sqrt[n]{e}}} \to \frac{1}{e^2} < 1,$$

ezért a végtelen sor konvergens.

6.48. Hányadoskritériummal:

$$\left|\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}\right| = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1,$$

ezért a végtelen sor konvergens.

Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n n!}{n^n}\right|} = \frac{2\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{2}{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} \to \frac{2}{e} < 1,$$

mert $\dfrac{n}{\sqrt{n!}} \to e$, így a végtelen sor konvergens.

6.50. Váltakozó előjelű a tagok sorozata, valamint az abszolútértékük $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ sorozata monoton csökkenő és nullához tart, így a Leibniz-tétel szerint konvergens a végtelen sor.

6.52. Divergens a végtelen sor, ugyanis a tagok sorozata nem tart nullához.

6.53. A Leibniz-tétel szerint konvergens a végtelen sor, mert a tagok sorozata váltakozó előjelű, továbbá az abszolútértékük sorozata nullához tart, hiszen

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 0,$$

és monoton csökkenő, mert

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \iff n(n^2+2n+2) \geq (n+1)(n^2+1) \iff n^2+n \geq 1,$$

ahol az utóbbi egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül.

6.55. Mivel a szinuszfüggvény 2π szerint periodikus, valamint $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ és $\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$, ezért

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n,$$

és ennek alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

így a harmonikus sor divergenciája alapján a vizsgált végtelen sor divergens.

6.57. A tagok sorozata nem tart nullához, mert az abszolútértékük sorozata sem:

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}\right|=\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}\to 1,$$

így a végtelen sor divergens.

6.59. Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}\right|}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{e}{3}<1,$$

így a végtelen sor konvergens.

6.60. Felső becslést adunk a végtelen sor tagjaira:

$$0\le\frac{6+n}{n^3+2n+1}<\frac{7}{n^2}\iff 0<6n^2(n-1)+14n+7,$$

hiszen az utóbbi egyenlőtlenség nyilván teljesül. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n^2}$ konvergens, ezért a majoránskritérium szerint a kérdéses végtelen sor konvergens.

6.63. Becsüljük triviálisan alulról a tagokat:

$$\frac{3+n}{n^2+n-1}>\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{n+1}.$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ divergens, ezért a minoránskritérium alapján a feladatbeli végtelen sor divergens.

6.65. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{(2n)!}}=\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n+1)}\to 0<1,$$

így a végtelen sor konvergens.

6.66. A tagok sorozatának előjele váltakozik, emellett

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

alapján a tagok abszolútértékének sorozata monoton csökkenő és nullához tart. A végtelen sor a Leibniz-tétel szerint konvergens.

6.68. A gyökkritériumot fogjuk alkalmazni.

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{4n+2}{5n-3}\right)^{2n+1}\right|}=\left(\frac{4n+2}{5n-3}\right)^2\sqrt[n]{\frac{4n+2}{5n-3}}=\left(\frac{4+\frac{2}{n}}{5-\frac{3}{n}}\right)^2\sqrt[n]{\frac{4n+2}{5n-3}}.$$

Az első tényező határértéke $\frac{16}{25}$, a második tényezőt először becsüljük mindkét oldalról:

$$\sqrt[n]{\frac{4}{5}}=\sqrt[n]{\frac{4n}{5n}}<\sqrt[n]{\frac{4n+2}{5n-3}}\le 1,\quad \text{ha } n\ge 5.$$

Mivel $\sqrt[n]{\frac{4}{5}}\to 1$, a rendőrszabály szerint $\sqrt[n]{\frac{4n+2}{5n-3}}\to 1$, ezért

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{4n+2}{5n-3}\right)^{2n+1}\right|}\to\frac{16}{25}<1.$$

Végül a gyökkritérium alapján a végtelen sor konvergens.

6.71. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\frac{\dfrac{(n+1)^4}{2^{2n+2}+3^{n+1}}}{\dfrac{n^4}{2^{2n}+3^n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\frac{4^n+3^n}{4\cdot 4^n+3\cdot 3^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}\to\frac{1}{4}<1,$$

ezért a végtelen sor konvergens.

6.73. A tagok sorozata nem tart nullához, hiszen $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{e}$ (lásd a 4.136. feladatot), ezért a végtelen sor divergens.

6.74. A tagok sorozata váltakozó előjelű, továbbá $n\ge 2$ esetén a tagok abszolútértékének $\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$ sorozata szigorúan monoton csökkenő, hiszen a szinuszfüggvény $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$-n nemnegatív és

szigorúan monoton növekszik. A szinuszfüggvény folytonos 0-ban, ezért az átviteli elv szerint

$$\frac{1}{n} \to 0 \implies \sin\frac{\pi}{n} \to \sin 0 = 0.$$

Végül a Leibniz-tétel következtében a végtelen sor konvergens.

6.77.

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \to \sqrt{\frac{1}{e}},$$

mert az $\frac{1}{e}$-hez tartó $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat (lásd a 4.136. feladatot) páros indexű részsorozatának határértéke is $\frac{1}{e}$. A végtelen sor tagjainak sorozata nem tart nullához, így a végtelen sor divergens.

6.79. Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \to |x|,$$

így a végtelen sor $|x| < 1$ esetén konvergens, $|x| > 1$ esetén divergens.

Ha $x = 1$, akkor a végtelen sor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ami divergens. Ha $x = -1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ a Leibniz-tétel szerint konvergens.

Tehát $-1 \le x < 1$ esetén konvergens a végtelen sor, egyébként divergens.

6.81. Ha $x = 0$, akkor a végtelen sor konvergens. Ha $x \neq 0$, akkor vizsgáljuk meg a hányadoskritériummal:

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}|x| \to |x|,$$

ezért $|x| < 1$ esetén konvergens, míg $|x| > 1$ esetén divergens a végtelen sor.

Ha $x = 1$, akkor a végtelen sor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, amelyik konvergens. Ha $x = -1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ az $x = 1$ eset alapján abszolút konvergens, tehát konvergens is.

Összefoglalva: a végtelen sor $|x| \le 1$ esetén konvergens, különben divergens.

7. Taylor-sorok

7.12. Elég belátni, hogy az $\dfrac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)}{x^3}$ függvény abszolút értéke nullához tart.

A $T_3(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ polinom az e^x függvény harmadik Taylor-polinomja a 0 körül. Erre felírva a Lagrange-maradékot

$$e^x - T_3(x) = \frac{e^d}{4!}x^4,$$

ahol d 0 és x „közötti” szám. Ezért ha $|x| < 1$, akkor $e^d < e^1 < 4$. Így tehát

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\right| < 6|x|^4,$$

ha $|x| < 1$. A rendőrszabályt alkalmazhatjuk:

$$0 < \left|\frac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)}{x^3}\right| < 6|x| \to 0.$$